

Школьный этап по математике

Математика. 9 класс. Ограничение по времени 120 минут

Трёхцветные короли . Вариант №1

#1186353

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

На шахматную доску выставляют королей трёх цветов: красного, синего и зелёного. Какое максимальное число королей можно выставить на доску 8×8 , чтобы короли одного цвета не били друг друга?

Правильный ответ:

48

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Оценка: разобьём доску на **16** квадратов **2×2**. В каждом таком квадрате может стоять не более **3** королей, так как если бы их там было **4**, то какие-то два из них были бы одного цвета и били бы друг друга. Значит, всего королей не более **48**.
Пример: в каждом квадрате можно расставить **3** короля, например, так:



Ответ: **48**.

За решение задачи **5 баллов**

Трёхцветные короли . Вариант №2

#1186354

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

На шахматную доску выставляют королей трёх цветов: красного, синего и зелёного. Какое максимальное число королей можно выставить на доску **6×6**, чтобы короли одного цвета не били друг друга?

Правильный ответ:

27

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Оценка: разобьём доску на **9** квадратов **2×2**. В каждом таком квадрате может стоять не более **3** королей, так как если бы их там было **4**, то какие-то два из них были бы одного цвета и били бы друг друга. Значит, всего королей не более **27**.
Пример: в каждом квадрате можно расставить **3** короля, например, так:



Ответ: **27**.

За решение задачи **5 баллов**

Трёхцветные короли . Вариант №3

#1186355

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

На шахматную доску выставляют королей трёх цветов: красного, синего и зелёного. Какое максимальное число королей можно выставить на доску 10×10 , чтобы короли одного цвета не били друг друга?

Правильный ответ:

75

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Оценка: разобьём доску на **25** квадратов 2×2 . В каждом таком квадрате может стоять не более **3** королей, так как если бы их там было **4**, то какие-то два из них были бы одного цвета и били бы друг друга. Значит, всего королей не более **75**.
Пример: в каждом квадрате можно расставить **3** короля, например, так:



Ответ: **75**.

За решение задачи **5 баллов**

Трёхцветные короли . Вариант №4

#1186356

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

На шахматную доску выставляют королей трёх цветов: красного, синего и зелёного. Какое максимальное число королей можно выставить на доску 4×4 , чтобы короли одного цвета не били друг друга?

Правильный ответ:

12

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Оценка: разобьём доску на 4 квадрата 2×2 . В каждом таком квадрате может стоять не более 3 королей, так как если бы их там было 4, то какие-то два из них были бы одного цвета и били бы друг друга. Значит, всего королей не более 12. Пример: в каждом квадрате можно расставить 3 короля, например, так:



Ответ: 12.

За решение задачи 5 баллов

Трёхцветные короли . Вариант №5

#1186357

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

На шахматную доску выставляют королей трёх цветов: красного, синего и зелёного. Какое максимальное число королей можно выставить на доску **12×12**, чтобы короли одного цвета не били друг друга?

Правильный ответ:

108

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Оценка: разобьём доску на **36** квадратов **2×2**. В каждом таком квадрате может стоять не более **3** королей, так как если бы их там было **4**, то какие-то два из них были бы одного цвета и били бы друг друга. Значит, всего королей не более **108**.
Пример: в каждом квадрате можно расставить **3** короля, например, так:



Ответ: 108.

За решение задачи **5 баллов**

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

На острове рыцарей и лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. На «Празднике середины осени» проводили фуршет. 888 гостей рассадили за 5-местные и 6-местные столики, причем пустых мест за столиками не осталось. Когда все расселись, каждый житель написал в своем личном блоге: «Не считая меня, за моим столиком сидит как минимум 4 лжеца».

1. Какое минимальное число рыцарей могло быть среди гостей?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

2. Сколько 5-местных столиков было занято при минимально возможном числе рыцарей?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

3. Сколько 6-местных столиков было занято при минимально возможном числе рыцарей?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

Решение задачи:

За каждым 5-местным столиком обязательно должен быть ровно один рыцарь, иначе либо лжецы скажут правду, либо рыцари солгут. За каждым 6-местным столиком должно сидеть ровно два рыцаря, иначе либо лжецы скажут правду, либо рыцари солгут. Поскольку $888 = 177 \cdot 5 + 3$, т.е. общее количество людей даёт при делении на 5 остаток 3, то общее количество 6-местных столиков должно быть как минимум 3. Тогда общее количество рыцарей должно быть как минимум $1 \cdot 174 + 2 \cdot 3 = 180$. Действительно, если взять три 6-местных столика с 2 рыцарями и 4 лжецами и остальные 174 5-местных столика с 1 рыцарем и 4 лжецами, можно будет рассадить ровно 888 гостей: $5 \cdot 174 + 6 \cdot 3 = 888$.

Ответ: 180 рыцарей, 174 пятиместных столика, 3 шестиместных столика.

За решение задачи 5 баллов

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

На острове рыцарей и лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. На «Празднике середины осени» проводили фуршет. **877** гостей рассадили за **5**-местные и **6**-местные столики, причем пустых мест за столиками не осталось. Когда все расселись, каждый житель написал в своем личном блоге: «Не считая меня, за моим столиком сидит как минимум **4** лжеца».

1. Какое минимальное число рыцарей могло быть среди гостей?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

2. Сколько **5**-местных столиков было занято при минимально возможном числе рыцарей?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

3. Сколько **6**-местных столиков было занято при минимально возможном числе рыцарей?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

Решение задачи:

За каждым **5**-местным столиком обязательно должен быть ровно один рыцарь, иначе либо лжецы скажут правду, либо рыцари солгут. За каждым **6**-местным столиком должно сидеть ровно два рыцаря, иначе либо лжецы скажут правду, либо рыцари солгут. Поскольку $877 = 175 \cdot 5 + 2$, т.е. общее количество людей даёт при делении на **5** остаток **2**, то общее количество **6**-местных столиков должно быть как минимум **2**. Тогда общее количество рыцарей должно быть как минимум $1 \cdot 173 + 2 \cdot 2 = 177$. Действительно, если взять два **6**-местных столика с **2** рыцарями и **4** лжецами и остальные **173 5**-местных столика с **1** рыцарем и **4** лжецами, можно будет рассадить ровно **877** гостей: $5 \cdot 173 + 6 \cdot 2 = 877$.

Ответ: **177** рыцарей, **173** пятиместных столика, **2** шестиместных столика.

За решение задачи 5 баллов

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

На острове рыцарей и лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. На «Празднике середины осени» проводили фуршет. 899 гостей рассадили за 5-местные и 6-местные столики, причем пустых мест за столиками не осталось. Когда все расселись, каждый житель написал в своем личном блоге: «Не считая меня, за моим столиком сидит как минимум 4 лжеца».

1. Какое минимальное число рыцарей могло быть среди гостей?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

2. Сколько 5-местных столиков было занято при минимально возможном числе рыцарей?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

3. Сколько 6-местных столиков было занято при минимально возможном числе рыцарей?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

Решение задачи:

За каждым 5-местным столиком обязательно должен быть ровно один рыцарь, иначе либо лжецы скажут правду, либо рыцари солгут. За каждым 6-местным столиком должно сидеть ровно два рыцаря, иначе либо лжецы скажут правду, либо рыцари солгут. Поскольку $899 = 179 \cdot 5 + 4$, т.е. общее количество людей даёт при делении на 5 остаток 4, то общее количество 6-местных столиков должно быть как минимум 4. Тогда общее количество рыцарей должно быть как минимум $1 \cdot 175 + 2 \cdot 4 = 183$. Действительно, если взять четыре 6-местных столика с 2 рыцарями и 4 лжецами и остальные 175 5-местных столиков с 1 рыцарем и 4 лжецами, можно будет рассадить ровно 877 гостей: $5 \cdot 175 + 6 \cdot 4 = 899$.

Ответ: 183 рыцаря, 175 пятиместных столиков, 4 шестиместных столика.

За решение задачи 5 баллов

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

На острове рыцарей и лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. На «Празднике середины осени» проводили фуршет. **883** гостя рассадили за **5**-местные и **6**-местные столики, причем пустых мест за столиками не осталось. Когда все расселись, каждый житель написал в своем личном блоге: «Не считая меня, за моим столиком сидит как минимум **4** лжеца».

1. Какое минимальное число рыцарей могло быть среди гостей?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

2. Сколько **5**-местных столиков было занято при минимально возможном числе рыцарей?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

3. Сколько **6**-местных столиков было занято при минимально возможном числе рыцарей?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

Решение задачи:

За каждым **5**-местным столиком обязательно должен быть ровно один рыцарь, иначе либо лжецы скажут правду, либо рыцари солгут. За каждым **6**-местным столиком должно сидеть ровно два рыцаря, иначе либо лжецы скажут правду, либо рыцари солгут. Поскольку $883 = 176 \cdot 5 + 3$, т.е. общее количество людей даёт при делении на **5** остаток **3**, то общее количество **6**-местных столиков должно быть как минимум **3**. Тогда общее количество рыцарей должно быть как минимум $1 \cdot 173 + 2 \cdot 3 = 179$. Действительно, если взять три **6**-местных столика с **2** рыцарями и **4** лжецами и остальные **173 5**-местных столика с **1** рыцарем и **4** лжецами, можно будет рассадить ровно **883** гостя: $5 \cdot 173 + 6 \cdot 3 = 883$.

Ответ: **179** рыцарей, **173** пятиместных столика, **3** шестиместных столика.

За решение задачи **5 баллов**

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

На острове рыцарей и лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. На «Празднике середины осени» проводили фуршет. **872** гостя рассадили за **5**-местные и **6**-местные столики, причем пустых мест за столиками не осталось. Когда все расселись, каждый житель написал в своем личном блоге: «Не считая меня, за моим столиком сидит как минимум **4** лжеца».

1. Какое минимальное число рыцарей могло быть среди гостей?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

2. Сколько **5**-местных столиков было занято при минимально возможном числе рыцарей?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

3. Сколько **6**-местных столиков было занято при минимально возможном числе рыцарей?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

Решение задачи:

За каждым **5**-местным столиком обязательно должен быть ровно один рыцарь, иначе либо лжецы скажут правду, либо рыцари солгут. За каждым **6**-местным столиком должно сидеть ровно два рыцаря, иначе либо лжецы скажут правду, либо рыцари солгут. Поскольку $872 = 174 \cdot 5 + 2$, т.е. общее количество людей даёт при делении на **5** остаток **2**, то общее количество **6**-местных столиков должно быть как минимум **2**. Тогда общее количество рыцарей должно быть как минимум $1 \cdot 172 + 2 \cdot 2 = 176$. Действительно, если взять два **6**-местных столика с **2** рыцарями и **4** лжецами и остальные **173 5**-местных столика с **1** рыцарем и **4** лжецами, можно будет рассадить ровно **883** гостя: $5 \cdot 172 + 6 \cdot 2 = 872$.

Ответ: **176** рыцарей, **172** пятиместных столика, **2** шестиместных столика.

За решение задачи **5 баллов**

Разность коэффициентов. Вариант №1

#1186363

Корни приведённого квадратного трёхчлена $x^2 + bx + c$ — натуральные числа, а разность его коэффициентов $c - b$ равна 29. Найдите все возможные значения наименьшего из корней этого трёхчлена.

1. Сколько вариантов ответа в этой задаче? В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

Правильный ответ:

3

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

2. Запишите все возможные значения наименьшего из корней этого трёхчлена в порядке возрастания без пробелов, не используя никакие знаки препинания. В качестве ответа вводите натуральное число, если вариантов ответа несколько, запишите их в порядке возрастания без пробелов, не используя никакие знаки препинания. Пример: 159

Правильный ответ:

124

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

Решение задачи:

Пусть корни квадратного трёхчлена $x^2 + bx + c$ — это натуральные числа y и z , причём y — меньший из двух корней. По теореме Виета $yz = c$, $y + z = -b$, тогда $yz + y + z = c - b = 29$. Поскольку $yz + y + z = y(z + 1) + z + 1 - 1 = (z + 1)(y + 1) - 1$, значит $(z + 1)(y + 1) = 30$. Учитывая, что y и z — натуральные числа, а также то, что y — меньший из двух корней, возможны три варианта: $y = 1, z = 14, y = 2, z = 9, y = 4, z = 5$. Тогда требуемая последовательность имеет вид 124.

Ответ: 3 варианта, 124.

За решение задачи 5 баллов

Разность коэффициентов. Вариант №2

#1186364

Корни приведённого квадратного трёхчлена $x^2 + bx + c$ — натуральные числа, а разность его коэффициентов $c - b$ равна 27. Найдите все возможные значения наименьшего из корней этого трёхчлена.

1. Сколько вариантов ответа в этой задаче? В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

Правильный ответ:

2

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

2. Запишите все возможные значения наименьшего из корней этого трёхчлена в порядке возрастания без пробелов, не используя никакие знаки препинания. В качестве ответа вводите натуральное число, если вариантов ответа несколько, запишите их в порядке возрастания без пробелов, не используя никакие знаки препинания. Пример: 159

Правильный ответ:

13

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

Решение задачи:

Пусть корни квадратного трёхчлена $x^2 + bx + c$ — это натуральные числа y и z , причём y — меньший из двух корней. По теореме Виета $yz = c$, $y + z = -b$, тогда $yz + y + z = c - b = 27$. Поскольку

$$yz + y + z = y(z + 1) + z + 1 - 1 = (z + 1)(y + 1) - 1$$

, значит $(z + 1)(y + 1) = 28$. Учитывая, что y и z — натуральные числа, а также то, что y — меньший из двух корней, возможны три варианта: $y = 1, z = 13, y = 3, z = 6$. Тогда требуемая последовательность имеет вид 13.

Ответ: 2 варианта, 13.

За решение задачи 5 баллов

Разность коэффициентов. Вариант №3

#1186366

Корни приведённого квадратного трёхчлена $x^2 + bx + c$ — натуральные числа, а разность его коэффициентов $c - b$ равна **31**. Найдите все возможные значения наименьшего из корней этого трёхчлена.

1. Сколько вариантов ответа в этой задаче? В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: **25**

Правильный ответ:

2

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

2. Запишите все возможные значения наименьшего из корней этого трёхчлена в порядке возрастания без пробелов, не используя никакие знаки препинания. В качестве ответа вводите натуральное число, если вариантов ответа несколько, запишите их в порядке возрастания без пробелов, не используя никакие знаки препинания. Пример: **159**

Правильный ответ:

13

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

Решение задачи:

Пусть корни квадратного трёхчлена $x^2 + bx + c$ — это натуральные числа y и z , причём y — меньший из двух корней. По теореме Виета $yz = c$, $y + z = -b$, тогда $yz + y + z = c - b = 31$. Поскольку $yz + y + z = y(z + 1) + z + 1 - 1 = (z + 1)(y + 1) - 1$, значит $(z + 1)(y + 1) = 32$. Учитывая, что y и z — натуральные числа, а также то, что y — меньший из двух корней, возможны три варианта: $y = 1, z = 15, y = 3, z = 7$. Тогда требуемая последовательность имеет вид **13**.

Ответ: 2 варианта, 13.

За решение задачи **5 баллов**

Разность коэффициентов. Вариант №4

#1186368

Корни приведённого квадратного трёхчлена $x^2 + bx + c$ — натуральные числа, а разность его коэффициентов $c - b$ равна **23**. Найдите все возможные значения наименьшего из корней этого трёхчлена.

1. Сколько вариантов ответа в этой задаче? В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: **25**

Правильный ответ:

3

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

2. Запишите все возможные значения наименьшего из корней этого трёхчлена в порядке возрастания без пробелов, не используя никакие знаки препинания. В качестве ответа вводите натуральное число, если вариантов ответа несколько, запишите их в порядке возрастания без пробелов, не используя никакие знаки препинания. Пример: **159**

Правильный ответ:

123

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

Решение задачи:

Пусть корни квадратного трёхчлена $x^2 + bx + c$ — это натуральные числа y и z , причём y — меньший из двух корней. По теореме Виета $yz = c$, $y + z = -b$, тогда $yz + y + z = c - b = 23$. Поскольку $yz + y + z = y(z + 1) + z + 1 - 1 = (z + 1)(y + 1) - 1$, значит $(z + 1)(y + 1) = 24$. Учитывая, что y и z — натуральные числа, а также то, что y — меньший из двух корней, возможны три варианта: $y = 1, z = 11, y = 2, z = 7, y = 3, z = 5$. Тогда требуемая последовательность имеет вид **123**.

Ответ: **3** варианта, **123**.

За решение задачи **5 баллов**

Разность коэффициентов. Вариант №5

#1186369

Корни приведённого квадратного трёхчлена $x^2 + bx + c$ — натуральные числа, а разность его коэффициентов $c - b$ равна **39**. Найдите все возможные значения наименьшего из корней этого трёхчлена.

1. Сколько вариантов ответа в этой задаче? В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: **25**

Правильный ответ:

3

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

2. Запишите все возможные значения наименьшего из корней этого трёхчлена в порядке возрастания без пробелов, не используя никакие знаки препинания. В качестве ответа вводите натуральное число, если вариантов ответа несколько, запишите их в порядке возрастания без пробелов, не используя никакие знаки препинания. Пример: **159**

Правильный ответ:

134

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

Решение задачи:

Пусть корни квадратного трёхчлена $x^2 + bx + c$ — это натуральные числа y и z , причём y — меньший из двух корней. По теореме Виета $yz = c$, $y + z = -b$, тогда $yz + y + z = c - b = 39$. Поскольку $yz + y + z = y(z + 1) + z + 1 - 1 = (z + 1)(y + 1) - 1$, значит $(z + 1)(y + 1) = 40$. Учитывая, что y и z — натуральные числа, а также то, что y — меньший из двух корней, возможны три варианта: $y = 1, z = 19, y = 3, z = 9, y = 4, z = 7$. Тогда требуемая последовательность имеет вид **134**.

Ответ: **3** варианта, **134**.

За решение задачи **5 баллов**

Золотое сечение. Вариант №1

#1186371

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

Известно, что число $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ называют *золотым числом*, и оно является корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Найдите значение выражения $a + 1 + \frac{(3a - 1)a}{a + 1}$ в численном виде.

Правильный ответ:

5

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Поскольку a является корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, значит $a = a^2 - 1$ и $a^2 - a = 1$. Тогда, учитывая, что $a \neq 1$, получаем:

$$\begin{aligned} a + 1 + \frac{(3a - 1)a}{a + 1} &= a + 1 + \frac{(3a - 1)(a^2 - 1)}{a + 1} = \\ &= a + 1 + (3a - 1)(a - 1) = 3a^2 - 3a + 2 = \\ &= 3(a^2 - a) + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5 \end{aligned}$$

Ответ: 5.

За решение задачи 5 баллов

Золотое сечение. Вариант №2

#1186373

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

Известно, что число $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ называют *золотым числом*, и оно является корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Найдите значение выражения $2 - 5a + \frac{(3a - 1)a}{a - 1}$ в численном виде.

Правильный ответ:

4

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Поскольку a является корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, значит $a = a^2 - 1$ и $a^2 - a = 1$. Тогда, учитывая, что $a \neq -1$, получаем:

$$\begin{aligned} 2 - 5a + \frac{(3a - 1)a}{a - 1} &= 2 - 5a + \frac{(3a - 1)(a^2 - 1)}{a - 1} = \\ &= 2 - 5a + (3a - 1)(a + 1) = 3a^2 - 3a + 1 = \\ &= 3(a^2 - a) + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4 \end{aligned}$$

Ответ: 4.

За решение задачи 5 баллов

Золотое сечение. Вариант №3

#1186374

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

Известно, что число $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ называют *золотым числом*, и оно является корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Найдите значение выражения $1 - 3a + \frac{(2a - 1)a}{a - 1}$ в численном виде.

Правильный ответ:

2

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Поскольку a является корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, значит $a = a^2 - 1$ и $a^2 - a = 1$. Тогда, учитывая, что $a \neq 1$, получаем:

$$\begin{aligned} 1 - 3a + \frac{(2a - 1)a}{a - 1} &= 1 - 3a + \frac{(2a - 1)(a^2 - 1)}{a - 1} = \\ &= 1 - 3a + (2a - 1)(a + 1) = 2a^2 - 2a = \\ &= 2(a^2 - a) = 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

Ответ: 2.

За решение задачи 5 баллов

Золотое сечение. Вариант №4

#1186375

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

Известно, что число $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ называют *золотым числом*, и оно является корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Найдите значение выражения $1 - a + \frac{(3a + 1)a}{a + 1}$ в численном виде.

Правильный ответ:

3

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Поскольку a является корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, значит $a = a^2 - 1$ и $a^2 - a = 1$. Тогда, учитывая, что $a \neq -1$, получаем:

$$\begin{aligned} 1 - a + \frac{(3a + 1)a}{a + 1} &= 1 - a + \frac{(3a + 1)(a^2 - 1)}{a + 1} = \\ &= 1 - a + (3a + 1)(a - 1) = 3a^2 - 3a = \\ &= 3(a^2 - a) = 3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

Ответ: 3.

За решение задачи 5 баллов

Золотое сечение. Вариант №5

#1186376

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

Известно, что число $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ называют *золотым числом*, и оно является корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Найдите значение выражения $7 - 2a + \frac{(a+2)a}{a+1}$ в численном виде.

Правильный ответ:

6

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Поскольку a является корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, значит $a = a^2 - 1$ и $a^2 - a = 1$. Тогда, учитывая, что $a \neq -1$, получаем:

$$\begin{aligned} 7 - 2a + \frac{(a+2)a}{a+1} &= 7 - 2a + \frac{(a+2)(a^2-1)}{a+1} = \\ &= 7 - 2a + (a+2)(a-1) = a^2 - a + 5 = \\ &= (a^2 - a) + 5 = 1 + 5 = 6 \end{aligned}$$

Ответ: 6.

За решение задачи 5 баллов

Прямоугольный треугольник. Вариант №1

#1186378

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

В прямоугольном треугольнике ABC отметили точку M – середину гипотенузы AB . Точка D выбрана на продолжении прямой AC за точку C , а точка E на отрезке BC . Точка N – середина отрезка DE . Оказалось, что $MN = AM = 5$ и $CBN = 30^\circ$. Найдите DE .

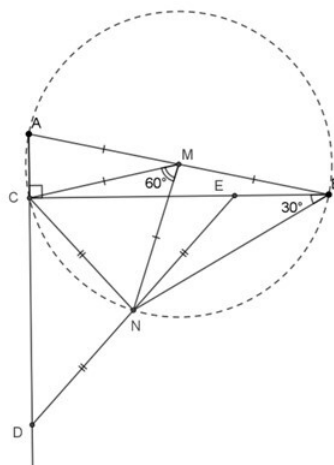
Правильный ответ:

10

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Заметим, что CM медиана прямоугольного треугольника ABC , выходящая из вершины прямого угла C , значит $CM = AM = MB$ (см. рисунок). По условию $MN = AM$, следовательно $MN = AM = MB = CM$. Значит, точки A, B, C, N лежат на одной окружности с центром в точке M . Тогда $\angle CMN$ – центральный, а $\angle CBN$ – вписанный, значит, $\angle CMN = 2\angle CBN = 60^\circ$. Но тогда $\triangle CMN$ – равнобедренный с углом 60° , значит, он равносторонний, и $CN = CM = MN = 5$. Заметим, что CN медиана прямоугольного треугольника CED , выходящая из вершины прямого угла C , значит $CN = EN = ND$. Тогда $DE = 2CN = 2 \cdot 5 = 10$.



Ответ: 10.

За решение задачи 5 баллов

Прямоугольный треугольник. Вариант №2

#1186380

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

В прямоугольном треугольнике ABC отметили точку M — середину гипотенузы AB . Точка D выбрана на продолжении прямой AC за точку C , а точка E на отрезке BC . Точка N — середина отрезка DE . Оказалось, что $MN = AM = 4$ и $CBN = 30^\circ$. Найдите DE .

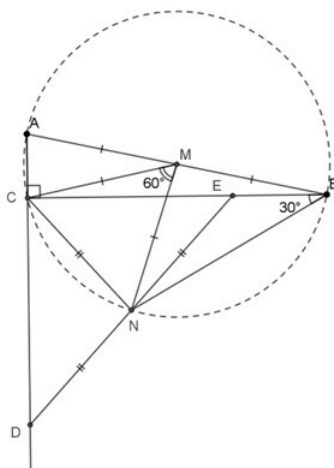
Правильный ответ:

8

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Заметим, что CM медиана прямоугольного треугольника ABC , выходящая из вершины прямого угла C , значит $CM = AM = MB$ (см. рисунок). По условию $MN = AM$, следовательно $MN = AM = MB = CM$. Значит, точки A, B, C, N лежат на одной окружности с центром в точке M . Тогда $\angle CMN$ — центральный, а $\angle CBN$ — вписанный, значит, $\angle CMN = 2\angle CBN = 60^\circ$. Но тогда $\triangle CMN$ — равнобедренный с углом 60° , значит, он равносторонний, и $CN = CM = MN = 4$. Заметим, что CN медиана прямоугольного треугольника CED , выходящая из вершины прямого угла C , значит $CN = EN = ND$. Тогда $DE = 2CN = 2 \cdot 4 = 8$.



Ответ: 8.

За решение задачи 5 баллов

Прямоугольный треугольник. Вариант №3

#1186381

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

В прямоугольном треугольнике ABC отметили точку M - середину гипотенузы AB . Точка D выбрана на продолжении прямой AC за точку C , а точка E на отрезке BC . Точка N - середина отрезка DE . Оказалось, что $MN = AM = 6$ и $CBN = 30^\circ$. Найдите DE .

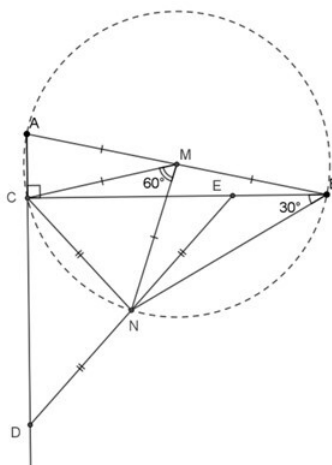
Правильный ответ:

12

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Заметим, что CM медиана прямоугольного треугольника ABC , выходящая из вершины прямого угла C , значит $CM = AM = MB$ (см. рисунок). По условию $MN = AM$, следовательно $MN = AM = MB = CM$. Значит, точки A, B, C, N лежат на одной окружности с центром в точке M . Тогда $\angle CMN$ - центральный, а $\angle CBN$ - вписанный, значит, $\angle CMN = 2\angle CBN = 60^\circ$. Но тогда $\triangle CMN$ - равнобедренный с углом 60° , значит, он равносторонний, и $CN = CM = MN = 6$. Заметим, что CN медиана прямоугольного треугольника CED , выходящая из вершины прямого угла C , значит $CN = EN = ND$. Тогда $DE = 2CN = 2 \cdot 6 = 12$.



Ответ: 12.

За решение задачи 5 баллов

Прямоугольный треугольник. Вариант №4

#1186382

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

В прямоугольном треугольнике ABC отметили точку M – середину гипотенузы AB . Точка D выбрана на продолжении прямой AC за точку C , а точка E на отрезке BC . Точка N – середина отрезка DE . Оказалось, что $MN = AM = 3$ и $CBN = 30^\circ$. Найдите DE .

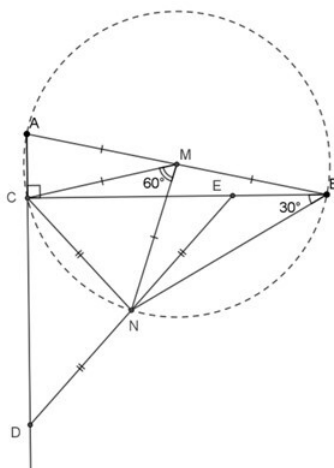
Правильный ответ:

6

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Заметим, что CM медиана прямоугольного треугольника ABC , выходящая из вершины прямого угла C , значит $CM = AM = MB$ (см. рисунок). По условию $MN = AM$, следовательно $MN = AM = MB = CM$. Значит, точки A, B, C, N лежат на одной окружности с центром в точке M . Тогда $\angle CMN$ – центральный, а $\angle CBN$ – вписанный, значит, $\angle CMN = 2\angle CBN = 60^\circ$. Но тогда $\triangle CMN$ – равнобедренный с углом 60° , значит, он равносторонний, и $CN = CM = MN = 3$. Заметим, что CN медиана прямоугольного треугольника CED , выходящая из вершины прямого угла C , значит $CN = EN = ND$. Тогда $DE = 2CN = 2 \cdot 3 = 6$.



Ответ: 6.

За решение задачи 5 баллов

Прямоугольный треугольник. Вариант №5

#1186384

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

В прямоугольном треугольнике ABC отметили точку M — середину гипотенузы AB . Точка D выбрана на продолжении прямой AC за точку C , а точка E на отрезке BC . Точка N — середина отрезка DE . Оказалось, что $MN = AM = 7$ и $CBN = 30^\circ$. Найдите DE .

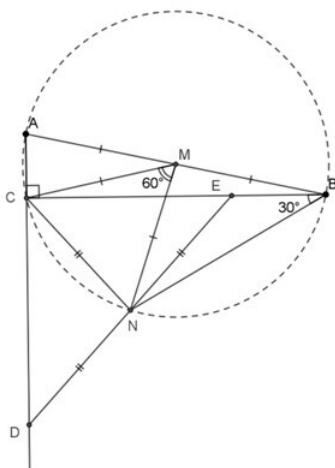
Правильный ответ:

14

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Заметим, что CM медиана прямоугольного треугольника ABC , выходящая из вершины прямого угла C , значит $CM = AM = MB$ (см. рисунок). По условию $MN = AM$, следовательно $MN = AM = MB = CM$. Значит, точки A, B, C, N лежат на одной окружности с центром в точке M . Тогда $\angle CMN$ — центральный, а $\angle CBN$ — вписанный, значит, $\angle CMN = 2\angle CBN = 60^\circ$. Но тогда $\triangle CMN$ — равнобедренный с углом 60° , значит, он равносторонний, и $CN = CM = MN = 7$. Заметим, что CN медиана прямоугольного треугольника CED , выходящая из вершины прямого угла C , значит $CN = EN = ND$. Тогда $DE = 2CN = 2 \cdot 7 = 14$.



Ответ: 14.

За решение задачи 5 баллов

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

В четырёхугольнике $ABCD$ отметили середины стороны AB , BC и AD – точки M , N и R соответственно, $\angle MNR = 70^\circ$, $\angle NRA = 80^\circ$. Расстояние от точки C до прямой AD равно 12. Найдите отрезок NM .

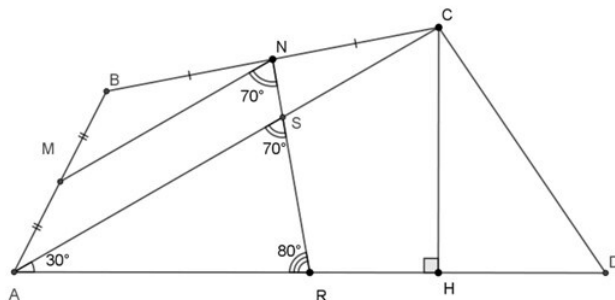
Правильный ответ:

12

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Опустим из точки C перпендикуляр на прямую AD и отметим точку H на прямой AD : $CH \perp AD$ и $CH = 12$. Заметим, что MN – средняя линия в треугольнике ABC , она параллельна AC и равна её половине. Пусть $NR \cap AC = S$. Тогда $\angle ASR = \angle MNR = 70^\circ$ как соответственные при $MN \parallel AC$ и секущей NR . Тогда в $\triangle ASR$ $\angle SAR = 180^\circ - 70^\circ - 80^\circ = 30^\circ$. Следовательно, $\triangle ACH$ – прямоугольный с углом 30° , значит $AC = 2CH = 24$. Выше отметили, что $MN = \frac{AC}{2} = \frac{24}{2} = 12$.



Ответ: 12.

За решение задачи 5 баллов

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

В четырёхугольнике $ABCD$ отметили середины стороны AB , BC и AD – точки M , N и R соответственно, $\angle MNR = 70^\circ$, $\angle NRA = 80^\circ$. Расстояние от точки C до прямой AD равно 10. Найдите отрезок NM .

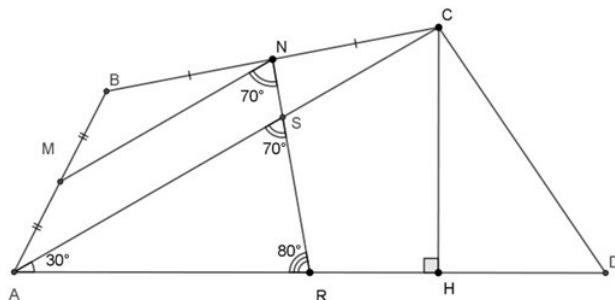
Правильный ответ:

10

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Опустим из точки C перпендикуляр на прямую AD и отметим точку H на прямой AD : $CH \perp AD$ и $CH = 10$. Заметим, что MN – средняя линия в треугольнике ABC , она параллельна AC и равна её половине. Пусть $NR \cap AC = S$. Тогда $\angle ASR = \angle MNR = 70^\circ$ как соответственные при $MN \parallel AC$ и секущей NR . Тогда в $\triangle ASR$ $\angle SAR = 180^\circ - 70^\circ - 80^\circ = 30^\circ$. Следовательно, $\triangle ACH$ – прямоугольный с углом 30° , значит $AC = 2CH = 20$. Выше отметили, что $MN = \frac{AC}{2} = \frac{20}{2} = 10$.



Ответ: 10.

За решение задачи 5 баллов

Четырёхугольник. Вариант №3

#1186392

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

В четырёхугольнике $ABCD$ отметили середины стороны AB , BC и AD – точки M , N и R соответственно, $\angle MNR = 70^\circ$, $\angle NRA = 80^\circ$. Расстояние от точки C до прямой AD равно 8. Найдите отрезок NM .

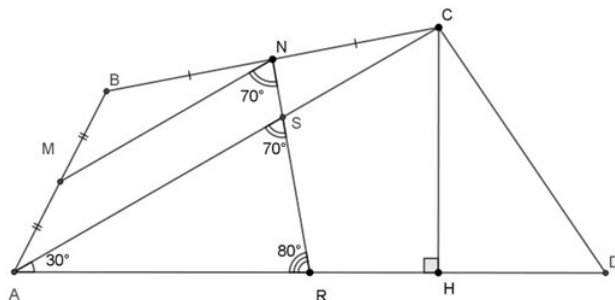
Правильный ответ:

8

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Опустим из точки C перпендикуляр на прямую AD и отметим точку H на прямой AD : $CH \perp AD$ и $CH = 8$. Заметим, что MN – средняя линия в треугольнике ABC , она параллельна AC и равна её половине. Пусть $NR \cap AC = S$. Тогда $\angle ASR = \angle MNR = 70^\circ$ как соответственные при $MN \parallel AC$ и секущей NR . Тогда в $\triangle ASR$ $\angle SAR = 180^\circ - 70^\circ - 80^\circ = 30^\circ$. Следовательно, $\triangle ACH$ – прямоугольный с углом 30° , значит $AC = 2CH = 16$. Выше отметили, что $MN = \frac{AC}{2} = \frac{16}{2} = 8$.



Ответ: 8.

За решение задачи 5 баллов

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

В четырёхугольнике $ABCD$ отметили середины стороны AB , BC и AD – точки M , N и R соответственно, $\angle MNR = 70^\circ$, $\angle NRA = 80^\circ$. Расстояние от точки C до прямой AD равно 9. Найдите отрезок NM .

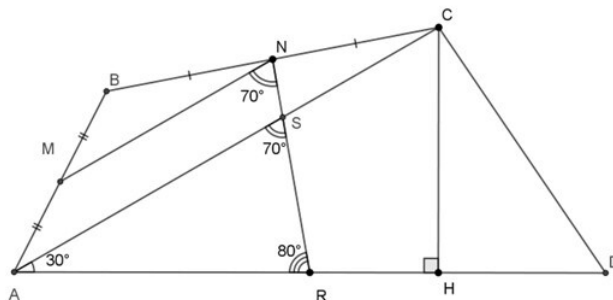
Правильный ответ:

9

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Опустим из точки C перпендикуляр на прямую AD и отметим точку H на прямой AD : $CH \perp AD$ и $CH = 9$. Заметим, что MN – средняя линия в треугольнике ABC , она параллельна AC и равна её половине. Пусть $NR \cap AC = S$. Тогда $\angle ASR = \angle MNR = 70^\circ$ как соответственные при $MN \parallel AC$ и секущей NR . Тогда в $\triangle ASR$ $\angle SAR = 180^\circ - 70^\circ - 80^\circ = 30^\circ$. Следовательно, $\triangle ACH$ – прямоугольный с углом 30° , значит $AC = 2CH = 18$. Выше отметили, что $MN = \frac{AC}{2} = \frac{18}{2} = 9$.



Ответ: 9.

За решение задачи 5 баллов

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

В четырёхугольнике $ABCD$ отметили середины стороны AB , BC и AD – точки M , N и R соответственно, $\angle MNR = 70^\circ$, $\angle NRA = 80^\circ$. Расстояние от точки C до прямой AD равно 11. Найдите отрезок NM .

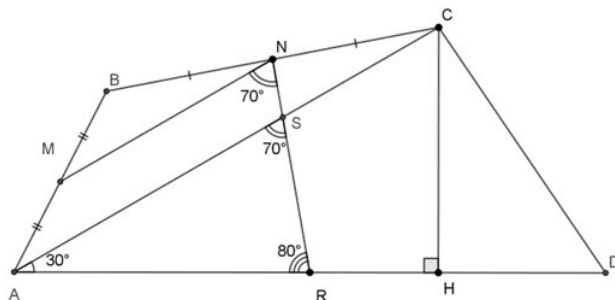
Правильный ответ:

11

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Опустим из точки C перпендикуляр на прямую AD и отметим точку H на прямой AD : $CH \perp AD$ и $CH = 11$. Заметим, что MN – средняя линия в треугольнике ABC , она параллельна AC и равна её половине. Пусть $NR \cap AC = S$. Тогда $\angle ASR = \angle MNR = 70^\circ$ как соответственные при $MN \parallel AC$ и секущей NR . Тогда в $\triangle ASR$ $\angle SAR = 180^\circ - 70^\circ - 80^\circ = 30^\circ$. Следовательно, $\triangle ACH$ – прямоугольный с углом 30° , значит $AC = 2CH = 22$. Выше отметили, что $MN = \frac{AC}{2} = \frac{22}{2} = 11$.



Ответ: 11.

За решение задачи 5 баллов

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

Известно, что в записи шестой степени натурального числа N используются цифры 0, 1 и 3 – каждая по одному разу, ещё три двойки и две четвёрки.

1. Чему может быть равно это число N ?

Правильный ответ:

18

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

2. Чему при этом равна шестая степень этого натурального числа N ?

Правильный ответ:

34012224

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

Решение задачи:

Заметим, что сумма цифр этого числа равна $0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 18$, а значит, делится на 3. Следовательно, само число N делится на 3. Кроме того, в записи числа используется ровно 8 цифр, то есть оно больше, чем 10^7 , но меньше, чем 10^8 .

Заметим, что $12^6 = 2^{12} \cdot 3^6 < 2^7 \cdot 5^7 = 10^7$ (т.к. $2^5 \cdot 3^6 = 23328 < 78125 = 5^7$), а $25^6 > 10^8$ (т.к. $5^4 = 625 > 2^8 = 256$). Значит, наше число лежит между 12 и 25 и делится на 3. Это может быть или 15, или 18, или 21, или 24. Но 15 не подходит, так как в этом случае в записи N^6 последняя цифра была бы пятёрка, 24 не подходит, так как в этом случае в записи N^6 последняя цифра была бы шестёрка. Остаётся проверить 21 и 18.

$21^6 = 85766121$ – не подходит,

$18^6 = 34012224$ – подходит, значит, $N = 18$.

Ответ: 18 и 34012224.

За решение задачи 5 баллов

Степень числа. Вариант №2

#1186396

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

Известно, что в записи пятой степени натурального числа N используются цифры **1, 5, 6 и 9** – каждая по одному разу, и ещё три восьмёрки.

1. Чему может быть равно это число N ?

Правильный ответ:

18

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

2. Чему при этом равна пятая степень этого натурального числа N ?

Правильный ответ:

1889568

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

Решение задачи:

Заметим, что сумма цифр этого числа равна $1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 8 \cdot 3 = 45$, а значит, делится на **3**. Следовательно, само число N делится на **3**. Кроме того, в записи числа используется ровно **7** цифр, то есть оно больше, чем 10^6 , но меньше, чем 10^7 .

Заметим, что $15^5 = 3^5 \cdot 5^5 < 2^6 \cdot 5^6 = 10^6$ (т.к. $3^5 = 243 < 320 = 5 \cdot 2^6$), а $25^5 = 5^{10} > 10^6$ (т.к. $5^4 = 625 > 64 = 2^6$). Значит, наше число лежит между **15** и **25** и делится на **3**. Это может быть или **18**, или **21**, или **24**. Но **24** не подходит, так как в этом случае в записи N^5 последняя цифра была бы четвёрка. Остаётся проверить **18** и **21**:

$21^5 = 4084101$ – не подходит,

$18^5 = 1889568$ – подходит, значит, $N = 18$.

Ответ: **18** и **1889568**.

За решение задачи 5 баллов

Степень числа. Вариант №3

#1186397

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

Известно, что в записи шестой степени натурального числа N используются цифры 2, 5, 7 и 8 – каждая по одному разу, и ещё две единицы и две шестёрки.

1. Чему может быть равно это число N ?

Правильный ответ:

21

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

2. Чему при этом равна шестая степень этого натурального числа N ?

Правильный ответ:

85766121

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

Решение задачи:

Заметим, что сумма цифр этого числа равна $2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 36$, а значит, делится на 3. Следовательно, само число N делится на 3. Кроме того, в записи числа используется ровно 8 цифр, то есть оно больше, чем 10^7 , но меньше, чем 10^8 .

Заметим, что $12^6 = 2^{12} \cdot 3^6 < 2^7 \cdot 5^7 = 10^7$ (т.к. $2^5 \cdot 3^6 = 23328 < 78125 = 5^7$), а $25^6 > 10^8$ (т.к. $5^4 = 625 > 2^8 = 256$). Значит, наше число лежит между 12 и 25 и делится на 3. Это может быть или 15, или 18, или 21, или 24. Но 18 не подходит, так как в этом случае в записи N^6 последняя цифра была бы четвёрка. Остаётся проверить 15, 21 и 24.

$15^6 = 11390625$ – не подходит,

$24^6 = 191102976$ – не подходит,

$21^6 = 85766121$ – подходит, значит, $N = 21$.

Ответ: 21 и 85766121.

За решение задачи 5 баллов

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

Известно, что в записи пятой степени натурального числа N используются цифры 0, 1, 4 – каждая по два раза, и ещё одна восьмёрка.

1. Чему может быть равно это число N ?

Правильный ответ:

21

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

2. Чему при этом равна пятая степень этого натурального числа N ?

Правильный ответ:

4084101

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

Решение задачи:

Заметим, что сумма цифр этого числа равна $0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 18$, а значит, делится на 3. Следовательно, само число N делится на 3. Кроме того, в записи числа используется ровно 7 цифр, то есть оно больше, чем 10^6 , но меньше, чем 10^7 .

Заметим, что $15^5 = 3^5 \cdot 5^5 < 2^6 \cdot 5^6 = 10^6$ (т.к. $3^5 = 243 < 320 = 5 \cdot 2^6$), а $25^5 = 5^{10} > 10^6$ (т.к. $5^4 = 625 > 64 = 2^6$). Значит, наше число лежит между 15 и 25 и делится на 3. Это может быть или 18, или 21, или 24. Остаётся проверить 18, 21 и 24 :

$18^5 = 1889568$ – не подходит,

$24^5 = 7962624$ – не подходит,

$21^5 = 4084101$ – подходит, значит, $N = 21$.

Ответ: 21 и 4084101.

За решение задачи 5 баллов

Степень числа. Вариант №5

#1186399

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

Известно, что в записи пятой степени натурального числа N используются цифры **4, 7, 9** – каждая по одному разу, и ещё две двойки и две шестёрки.

1. Чему может быть равно это число N ?

Правильный ответ:

24

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

2. Чему при этом равна пятая степень этого натурального числа N ?

Правильный ответ:

7962624

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

Решение задачи:

Заметим, что сумма цифр этого числа равна $4 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 36$, а значит, делится на **3**. Следовательно, само число N делится на **3**. Кроме того, в записи числа используется ровно **7** цифр, то есть оно больше, чем 10^6 , но меньше, чем 10^7 . Заметим, что $15^5 = 3^5 \cdot 5^5 < 2^6 \cdot 5^6 = 10^6$ (т.к. $3^5 = 243 < 320 = 5 \cdot 2^6$), а $25^5 = 5^{10} > 10^6$ (т.к. $5^4 = 625 > 64 = 2^6$).

Значит, наше число лежит между **15** и **25** и делится на **3**. Это может быть или **18**, или **21**, или **24**. Но **21** не подходит, так как в этом случае в записи N^5 последняя цифра была бы единица. Аналогично **18** не подходит, так как в этом случае в записи N^5 последняя цифра была бы 8. Остаётся проверить **24** :

$24^5 = 7962624$ подходит, значит, $N = 24$.

Ответ: **24** и **7962624**.

За решение задачи 5 баллов

Мультипликатор. Вариант №1

#1186400

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

На доске написано число **3969000**. Каждую минуту робот «Мультипликатор» производит с записанным на доске числом следующую операцию: умножает его на одну из трёх дробей – или на $\frac{4}{3}$ или на $\frac{9}{5}$ или на $\frac{25}{7}$, но только если полученное в результате число будет целым. Полученное после умножения целое число робот записывает на доску вместо предыдущего.

1. Какое максимальное количество таких операций сможет сделать робот?

Правильный ответ:

27

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

2. Сколько операций умножения на дробь $\frac{4}{3}$ будет при этом совершено?

Правильный ответ:

18

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

3. Сколько операций умножения на дробь $\frac{9}{5}$ будет при этом совершено?

Правильный ответ:

7

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

4. Сколько операций умножения на дробь $\frac{25}{7}$ будет при этом совершено?

Правильный ответ:

2

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

Разложим 3969000 на простые множители: $3969000 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2$. Анализируя степени вхождения 7 , 5 и 3 в исходное число, а также дроби, на которые мы умножаем, введём понятие *веса* числа: пусть каждая семёрка имеет вес 7 , каждая пятёрка имеет *вес* 3 , а каждая тройка имеет *вес* 1 . Пусть тогда *кумулятивный* вес исходного числа равен сумме произведений *веса* простого множителя на его степень вхождения: $7 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 27$. Заметим, что каждая операция уменьшает *кумулятивный вес* числа на 1 . Действительно:

	изменение <i>кумулятивного веса</i>
умножение на $\frac{4}{3}$	-1
умножение на $\frac{9}{5}$	$+1 + 1 - 3 = -1$
умножение на $\frac{25}{7}$	$+3 + 3 - 7 = -1$

Полученное после умножения число остаётся целым до тех пор, пока его *кумулятивный вес* неотрицателен. Значит, можно будет сделать не более 27 операций, причём на $\frac{25}{7}$ можно умножать не более 2 раз, на $\frac{9}{5}$ не более 7 раз и на $\frac{4}{3}$ не более 18 раз. Покажем, что такое возможно:

$3969000 \cdot \left(\frac{25}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{18} = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot \frac{5^4 \cdot 3^{14} \cdot 2^{36}}{7^2 \cdot 5^7 \cdot 3^{18}} = 2^{39}$. Далее ни одной операции совершить будет невозможно.

Ответ: $27, 18, 7, 2$.

Мультипликатор. Вариант №2

#1186401

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

На доске написано число **1134000**. Каждую минуту робот «Мультипликатор» производит с записанным на доске числом следующую операцию: умножает его на одну из трёх дробей – или на $\frac{4}{3}$ или на $\frac{9}{5}$ или на $\frac{25}{7}$, но только если полученное в результате число будет целым. Полученное после умножения целое число робот записывает на доску вместо предыдущего.

1. Какое максимальное количество таких операций сможет сделать робот?

Правильный ответ:

20

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

2. Сколько операций умножения на дробь $\frac{4}{3}$ будет при этом совершено?

Правильный ответ:

14

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

3. Сколько операций умножения на дробь $\frac{9}{5}$ будет при этом совершено?

Правильный ответ:

5

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

4. Сколько операций умножения на дробь $\frac{25}{7}$ будет при этом совершено?

Правильный ответ:

1

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

Разложим **1134000** на простые множители: $1134000 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7$. Анализируя степени вхождения **7**, **5** и **3** в исходное число, а также дроби, на которые мы умножаем, введём понятие *веса* числа: пусть каждая семёрка имеет вес **7**, каждая пятёрка имеет *вес 3*, а каждая тройка имеет *вес 1*. Пусть тогда *кумулятивный вес* исходного числа равен сумме произведений *веса* простого множителя на его степень вхождения: $7 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 20$. Заметим, что каждая операция уменьшает *кумулятивный вес* числа на **1**. Действительно:

	изменение <i>кумулятивного веса</i>
умножение на $\frac{4}{3}$	-1
умножение на $\frac{9}{5}$	$+1 + 1 - 3 = -1$
умножение на $\frac{25}{7}$	$+3 + 3 - 7 = -1$

Полученное после умножения число остаётся целым до тех пор, пока его *кумулятивный вес* неотрицателен. Значит, можно будет сделать не более **20** операций, причём на $\frac{25}{7}$ можно умножать не более **1** раза, на $\frac{9}{5}$ не более **5** раз и на $\frac{4}{3}$ не более **14** раз. Покажем, что такое возможно:

$1134000 \cdot \left(\frac{25}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{14} = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot \frac{5^2 \cdot 3^{10} \cdot 2^{28}}{7 \cdot 5^5 \cdot 3^{14}} = 2^{32}$. Далее ни одной операции совершить будет невозможно.

Ответ: **20, 14, 5, 1.**

Мультипликатор. Вариант №3

#1186402

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

На доске написано число **11907000**. Каждую минуту робот «Мультипликатор» производит с записанным на доске числом следующую операцию: умножает его на одну из трёх дробей – или на $\frac{4}{3}$ или на $\frac{9}{5}$ или на $\frac{25}{7}$, но только если полученное в результате число будет целым. Полученное после умножения целое число робот записывает на доску вместо предыдущего.

1. Какое максимальное количество таких операций сможет сделать робот?

Правильный ответ:

28

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

2. Сколько операций умножения на дробь $\frac{4}{3}$ будет при этом совершено?

Правильный ответ:

19

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

3. Сколько операций умножения на дробь $\frac{9}{5}$ будет при этом совершено?

Правильный ответ:

7

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

4. Сколько операций умножения на дробь $\frac{25}{7}$ будет при этом совершено?

Правильный ответ:

2

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

Разложим **11907000** на простые множители: $11907000 = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2$. Анализируя степени вхождения **7**, **5** и **3** в исходное число, а также дроби, на которые мы умножаем, введём понятие *веса* числа: пусть каждая семёрка имеет вес **7**, каждая пятёрка имеет *вес 3*, а каждая тройка имеет *вес 1*. Пусть тогда *кумулятивный вес* исходного числа равен сумме произведений *веса* простого множителя на его степень вхождения: $7 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 28$ Заметим, что каждая операция уменьшает *кумулятивный вес* числа на **1**. Действительно:

	изменение <i>кумулятивного веса</i>
умножение на $\frac{4}{3}$	-1
умножение на $\frac{9}{5}$	$+1 + 1 - 3 = -1$
умножение на $\frac{25}{7}$	$+3 + 3 - 7 = -1$

Полученное после умножения число остаётся целым до тех пор, пока его *кумулятивный вес* неотрицателен. Значит, можно будет сделать не более **28** операций, причём на $\frac{25}{7}$ можно умножать не более **2** раз, на $\frac{9}{5}$ не более **7** раз и на $\frac{4}{3}$ не более **19** раз. Покажем, что такое возможно:

$11907000 \cdot \left(\frac{25}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{19} = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot \frac{5^4 \cdot 3^{14} \cdot 2^{38}}{7^2 \cdot 5^7 \cdot 3^{19}} = 2^{41}$. Далее ни одной операции совершить будет невозможно.

Ответ: **28, 19, 7, 2**.

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

На доске написано число **5670000**. Каждую минуту робот «Мультипликатор» производит с записанным на доске числом следующую операцию: умножает его на одну из трёх дробей – или на $\frac{4}{3}$ или на $\frac{9}{5}$ или на $\frac{25}{7}$, но только если полученное в результате число будет целым. Полученное после умножения целое число робот записывает на доску вместо предыдущего.

1. Какое максимальное количество таких операций сможет сделать робот?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

2. Сколько операций умножения на дробь $\frac{4}{3}$ будет при этом совершено?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

3. Сколько операций умножения на дробь $\frac{9}{5}$ будет при этом совершено?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

4. Сколько операций умножения на дробь $\frac{25}{7}$ будет при этом совершено?

Правильный ответ:

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

Разложим 5670000 на простые множители: $5670000 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7$. Анализируя степени вхождения $7, 5$ и 3 в исходное число, а также дроби, на которые мы умножаем, введём понятие *веса* числа: пусть каждая семёрка имеет вес 7 , каждая пятёрка имеет *вес* 3 , а каждая тройка имеет *вес* 1 . Пусть тогда *кумулятивный* вес исходного числа равен сумме произведений *веса* простого множителя на его степень вхождения: $7 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 23$ Заметим, что каждая операция уменьшает *кумулятивный вес* числа на 1 . Действительно:

	изменение <i>кумулятивного веса</i>
умножение на $\frac{4}{3}$	-1
умножение на $\frac{9}{5}$	$+1 + 1 - 3 = -1$
умножение на $\frac{25}{7}$	$+3 + 3 - 7 = -1$

Полученное после умножения число остаётся целым до тех пор, пока его *кумулятивный вес* неотрицателен. Значит, можно будет сделать не более 23 операций, причём на $\frac{25}{7}$ можно умножать не более 1 раза, на $\frac{9}{5}$ не более 6 раз и на $\frac{4}{3}$ не более 16 раз. Покажем, что такое возможно:

$5670000 \cdot \left(\frac{25}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{16} = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot \frac{5^2 \cdot 3^{12} \cdot 2^{32}}{7 \cdot 5^6 \cdot 3^{16}} = 2^{36}$. Далее ни одной операции совершить будет невозможно.

Ответ: $23, 16, 6, 1$.

Мультипликатор. Вариант №5

#1186404

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

На доске написано число **9922500**. Каждую минуту робот «Мультипликатор» производит с записанным на доске числом следующую операцию: умножает его на одну из трёх дробей – или на $\frac{4}{3}$ или на $\frac{9}{5}$ или на $\frac{25}{7}$, но только если полученное в результате число будет целым. Полученное после умножения целое число робот записывает на доску вместо предыдущего.

1. Какое максимальное количество таких операций сможет сделать робот?

Правильный ответ:

30

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

2. Сколько операций умножения на дробь $\frac{4}{3}$ будет при этом совершено?

Правильный ответ:

20

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

3. Сколько операций умножения на дробь $\frac{9}{5}$ будет при этом совершено?

Правильный ответ:

8

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

4. Сколько операций умножения на дробь $\frac{25}{7}$ будет при этом совершено?

Правильный ответ:

2

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

Разложим **9922500** на простые множители: $9922500 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^2$. Анализируя степени вхождения **7**, **5** и **3** в исходное число, а также дроби, на которые мы умножаем, введём понятие *веса* числа: пусть каждая семёрка имеет вес **7**, каждая пятёрка имеет *вес 3*, а каждая тройка имеет *вес 1*. Пусть тогда *кумулятивный вес* исходного числа равен сумме произведений *веса* простого множителя на его степень вхождения: $7 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 30$ Заметим, что каждая операция уменьшает *кумулятивный вес* числа на **1**. Действительно:

	изменение <i>кумулятивного веса</i>
умножение на $\frac{4}{3}$	-1
умножение на $\frac{9}{5}$	$+1 + 1 - 3 = -1$
умножение на $\frac{25}{7}$	$+3 + 3 - 7 = -1$

Полученное после умножения число остаётся целым до тех пор, пока его *кумулятивный вес* неотрицателен. Значит, можно будет сделать не более **30** операций, причём на $\frac{25}{7}$ можно умножать не более **2** раз, на $\frac{9}{5}$ не более **8** раз и на $\frac{4}{3}$ не более **20** раз. Покажем, что такое возможно:

$9922500 \cdot \left(\frac{25}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{20} = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot \frac{5^4 \cdot 3^{16} \cdot 2^{40}}{7^2 \cdot 5^8 \cdot 3^{20}} = 2^{42}$. Далее ни одной операции совершить будет невозможно.

Ответ: **30, 20, 8, 2**.