Школьный этап по математике

Математика. 8 класс. Ограничение по времени 90 минут

Гимнастки . Вариант №1

#1186293

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 12

В гимнастическом кружке занимается 7 девочек. На соревнованиях могут выступать только команды, состоящие из двух или из трёх гимнасток. Команды отличаются только составом, порядковых номеров ни у самих команд, ни у участниц внутри команд нет. Сколько существует различных способов разбить девочек на команды таким образом, чтобы все девочки приняли участие в этих соревнованиях, причём каждая девочка выступила ровно один раз?

Правильный ответ:

105

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Команда из трёх гимнасток должна быть ровно одна. Докажем это. Если нет ни одной команды из трёх гимнасток, то 7 человек нельзя будет разбить на команды по двое. Если команд из трёх гимнасток будет две, то оставшаяся девочка останется без команды. Более двух таких команд тоже быть не может. Итак, должна быть одна команда из трёх гимнасток и две команды их двух гимнасток. Трёх девочек в команду можно набрать $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$ способами. Оставшихся четырёх девочек нужно разбить на команды по двое. Это можно сделать тремя способами. Всего $35 \cdot 3 = 105$ способов.

Ответ: 105.

За решение задачи **5 баллов**

Гимнастки . Вариант №2

#1186294

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 12

В гимнастическом кружке занимается 9 девочек. На соревнованиях могут выступать только команды, состоящие из двух или из пяти гимнасток. Команды отличаются только составом, порядковых номеров ни у самих команд, ни у участниц внутри команд нет. Сколько существует различных способов разбить девочек на команды таким образом, чтобы все девочки приняли участие в этих соревнованиях, причём каждая девочка выступила ровно один раз?

Правильный ответ:

378

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Команда из пяти гимнасток должна быть ровно одна. Докажем это. Если нет ни одной команды из пяти гимнасток, то 9 человек нельзя будет разбить на команды по двое. Более одной команды пяти девочек из 9 человек быть не может. Значит, должна быть одна команда из пяти гимнасток и две команды их двух гимнасток. Пять девочек в команду можно набрать $\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{120} = 126$ способами. Оставшихся четырёх девочек нужно разбить на команды по двое. Это можно сделать тремя способами. Всего $126 \cdot 3 = 378$ способов.

Ответ: 378.

За решение задачи **5 баллов**

Гимнастки . Вариант №3

#1186295

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 12

В гимнастическом кружке занимается 11 девочек. На соревнованиях могут выступать только команды, состоящие из двух или из семи гимнасток. Команды отличаются только составом, порядковых номеров ни у самих команд, ни у участниц внутри команд нет. Сколько существует различных способов разбить девочек на команды таким образом, чтобы все девочки приняли участие в этих соревнованиях, причём каждая девочка выступила ровно один раз?

Правильный ответ:

990

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Команда из семи гимнасток должна быть ровно одна. Докажем это. Если нет ни одной команды из семи гимнасток, то 11 человек нельзя будет разбить на команды по двое. Более одной команды семи девочек из 11 человек быть не может. Значит, должна быть одна команда из семи гимнасток и две команды их двух гимнасток. Семь девочек в команду можно набрать $\dfrac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{7!}=330$ способами. Оставшихся четырёх девочек нужно разбить на команды по двое. Это можно сделать тремя способами. Всего $330\cdot 3=990$ способов.

Ответ: 990.

За решение задачи **5 баллов**

Гимнастки . Вариант №4

#1186296

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 12

В гимнастическом кружке занимается 13 девочек. На соревнованиях могут выступать только команды, состоящие из двух или из девяти гимнасток. Команды отличаются только составом, порядковых номеров ни у самих команд, ни у участниц внутри команд нет. Сколько существует различных способов разбить девочек на команды таким образом, чтобы все девочки приняли участие в этих соревнованиях, причём каждая девочка выступила ровно один раз?

Правильный ответ:

2145

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Команда из девяти гимнасток должна быть ровно одна. Докажем это. Если нет ни одной команды из девяти гимнасток, то 13 человек нельзя будет разбить на команды по двое. Более одной команды девяти девочек из 13 человек быть не может. Значит, должна быть одна команда из девяти гимнасток и две команды их двух гимнасток. Девять девочек в команду можно набрать $\frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{9!}=715$ способами. Оставшихся четырёх девочек нужно разбить на команды по двое. Это можно сделать тремя способами. Всего $715\cdot33=2145$ способов.

Ответ: 2145.

За решение задачи **5 баллов**

Гимнастки . Вариант №5

#1186297

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 12

В гимнастическом кружке занимается 11 девочек. На соревнованиях могут выступать только команды, состоящие из пяти или из трёх гимнасток. Команды отличаются только составом, порядковых номеров ни у самих команд, ни у участниц внутри команд нет. Сколько существует различных способов разбить девочек на команды таким образом, чтобы все девочки приняли участие в этих соревнованиях, причём каждая девочка выступила ровно один раз?

Правильный ответ:

4620

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Команда из пяти гимнасток должна быть ровно одна. Докажем это. Если нет ни одной команды из пяти гимнасток, то 11 человек нельзя будет разбить на команды по трое. Если команд из пяти гимнасток будет две, то оставшаяся девочка останется без команды. Более двух таких команд тоже быть не может. Итак, должна быть одна команда из пяти гимнасток и две команды их трёх гимнасток. Пять девочек в команду можно набрать $\dfrac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{5!}=462$ способами. Оставшихся шесть девочек нужно разбить на команды по трое. Это можно сделать 10 способами. Всего $462\cdot 10=4620$ способов.

Ответ: 4620.

За решение задачи **5 баллов**

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 13

На балу мальчики танцевали с девочками, причём каждая пара танцевала не более одного танца. Мальчиков было пятеро. После бала каждый мальчик рассказал, со сколькими девочками он потанцевал, и оказалось, что были названы 5 последовательных натуральных чисел. А каждая из девочек рассказала, что танцевала со всеми мальчиками, кроме кого-то одного.

$1.$ Какое минимальное количество девочек могло танцевать на этом балу?

Правильный ответ:

10

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

$2.$ Сколько танцев всего станцевали на этом балу при минимально возможном количестве девочек?

Правильный ответ:

40

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

Решение задачи:

Оценка: пусть было x девочек, и каждая танцевала с четырьмя мальчиками, тогда всего танцев было $4x$. Каждый мальчик потанцевал не более чем с x девочками, причем количество танцев мальчиков – это 5 последовательных натуральных чисел, значит общая сумма танцев была не более чем $5x-0+1+2+3+4=5x-10$. Значит $4x \leq 5x-10$, тогда $x \geq 10$.

Пример: 10 девочек быть могло, например, если мальчики танцевали с $10, 9, 8, 7, 6$ девочками. Пример для этого случая представлен в таблице. Пусть мальчики это М1-М5, девочки – это Д1-Д10, если мальчик и девочка танцуют, то в соответствующей клетке таблицы стоит 1, всего количество танцев равно 40:

	Д1	Д2	Д3	Д4	Д5	Д6	Д7	Д8	Д9	Д10
М1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
М2		1	1	1	1	1	1	1	1	1
М3	1			1	1	1	1	1	1	1
М4	1	1	1				1	1	1	1
М5	1	1	1	1	1	1				

Тогда минимальное количество девочек, которые танцевали на этом балу, равно 10. При этом на балу станцевали 40 танцев.

Ответ: 10 девочек, 40 танцев.

За решение задачи **5 баллов**

Танцы . Вариант №2

#1186299

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 13

На балу мальчики танцевали с девочками, причём каждая пара танцевала не более одного танца. Мальчиков было четверо. После бала каждый мальчик рассказал, со сколькими девочками он потанцевал, и оказалось, что были названы 4 последовательных натуральных числа. А каждая из девочек рассказала, что танцевала со всеми мальчиками, кроме кого-то одного.

$1.$ Какое минимальное количество девочек могло танцевать на этом балу?

Правильный ответ:

6

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

$2.$ Сколько танцев всего станцевали на этом балу при минимально возможном количестве девочек?

Правильный ответ:

18

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

Решение задачи:

Оценка: пусть было x девочек, и каждая танцевала с тремя мальчиками, тогда всего танцев было $3x$. Каждый мальчик потанцевал не более чем с x девочками, причем количество танцев мальчиков – это 4 последовательных натуральных числа, значит общая сумма танцев была не более чем $4x-0+1+2+3=4x-6$. Значит $3x \le 4x-6$, тогда $x \ge 6$.

Пример: 6 девочек быть могло, например, если мальчики танцевали с $3, 4, 5, 6$ девочками. Пример для этого случая представлен в таблице. Пусть мальчики это М1-М4, девочки – это Д1-Д6, если мальчик и девочка танцуют, то в соответствующей клетке таблицы стоит 1, всего количество танцев равно 18:

	Д1	Д2	Д3	Д4	Д5	Д6
М1	1	1	1	1	1	1
М2		1	1	1	1	1
М3	1			1	1	1
М4	1	1	1			

Тогда минимальное количество девочек, которые танцевали на этом балу, равно 6. При этом на балу станцевали 18 танцев.

Ответ: 6 девочек, 18 танцев.

За решение задачи 5 баллов

Танцы . Вариант №3

#1186300

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 13

На балу мальчики танцевали с девочками, причём каждая пара танцевала не более одного танца. Мальчиков было шестеро. После бала каждый мальчик рассказал, со сколькими девочками он потанцевал, и оказалось, что были названы 6 последовательных натуральных чисел. А каждая из девочек рассказала, что танцевала со всеми мальчиками, кроме кого-то одного.

$1.$ Какое минимальное количество девочек могло танцевать на этом балу?

Правильный ответ:

15

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

$2.$ Сколько танцев всего станцевали на этом балу при минимально возможном количестве девочек?

Правильный ответ:

75

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

Решение задачи:

Оценка: пусть было x девочек, и каждая танцевала с пятью мальчиками, тогда всего танцев было $5x$. Каждый мальчик потанцевал не более чем с x девочками, причем количество танцев мальчиков – это 6 последовательных натуральных чисел, значит общая сумма танцев была не более чем $6x-0+1+2+3+4+5=6x-15$. Значит $5x \leq 6x-15$, тогда $x \geq 15$.

Пример: 15 девочек быть могло, например, если мальчики танцевали с $10, 11, 12, 13, 14, 15$ девочками. Пример для этого случая представлен в таблице. Пусть мальчики это М1-М6, девочки – это Д1-Д15, если мальчик и девочка танцуют, то в соответствующей клетке таблицы стоит 1, всего количество танцев равно 75:

	Д1	Д2	Д3	Д4	Д5	Д6	Д7	Д8	Д9	Д10	Д11	Д12	Д13	Д14	Д15
М1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
М2		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
М3	1			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
М4	1	1	1				1	1	1	1	1	1	1	1	1
М5	1	1	1	1	1	1					1	1	1	1	1
М6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					

Тогда минимальное количество девочек, которые танцевали на этом балу, равно 15. При этом на балу станцевали 75 танцев.

Ответ: 15 девочек, 75 танцев.

За решение задачи 5 баллов

Танцы . Вариант №4

#1186301

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 13

На балу мальчики танцевали с девочками, причём каждая пара танцевала не более одного танца. Мальчиков было трое. После бала каждый мальчик рассказал, со сколькими девочками он потанцевал, и оказалось, что были названы 3 последовательных натуральных числа. А каждая из девочек рассказала, что танцевала со всеми мальчиками, кроме кого-то одного.

$1.$ Какое минимальное количество девочек могло танцевать на этом балу?

Правильный ответ:

3

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

$2.$ Сколько танцев всего станцевали на этом балу при минимально возможном количестве девочек?

Правильный ответ:

6

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

Решение задачи:

Оценка: пусть было x девочек, и каждая танцевала с двумя мальчиками, тогда всего танцев было $2x$. Каждый мальчик потанцевал не более чем с x девочками, причем количество танцев мальчиков – это 3 последовательных натуральных числа, значит общая сумма танцев была не более чем $2x-0+1+2=3x-3$. Значит $2x \leq 3x-3$, тогда $x \geq 3$.

Пример: 3 девочки быть могло, например, если мальчики танцевали с $3, 2, 1$ девочками. Пример для этого случая представлен в таблице. Пусть мальчики это М1-М3, девочки – это Д1-Д3, если мальчик и девочка танцуют, то в соответствующей клетке таблицы стоит 1, всего количество танцев равно 6:

	Д1	Д2	Д3
М1	1	1	1
М2		1	1
М3	1		

Тогда минимальное количество девочек, которые танцевали на этом балу, равно 3. При этом на балу станцевали 6 танцев.

Ответ: 3 девочки, 6 танцев.

За решение задачи 5 баллов

Танцы . Вариант №5

#1186302

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 13

На балу мальчики танцевали с девочками, причём каждая пара танцевала не более одного танца. Мальчиков было семеро. После бала каждый мальчик рассказал, со сколькими девочками он потанцевал, и оказалось, что были названы 7 последовательных натуральных чисел. А каждая из девочек рассказала, что танцевала со всеми мальчиками, кроме кого-то одного.

$1.$ Какое минимальное количество девочек могло танцевать на этом балу?

Правильный ответ:

21

Формула вычисления баллов: 0-3 1-0

3 балла

$2.$ Сколько танцев всего станцевали на этом балу при минимально возможном количестве девочек?

Правильный ответ:

126

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

Решение задачи:

Оценка: пусть было x девочек, и каждая танцевала с шестью мальчиками, тогда всего танцев было $6x$. Каждый мальчик потанцевал не более чем с x девочками, причем количество танцев мальчиков – это 7 последовательных натуральных чисел, значит общая сумма танцев была не более чем $7x - 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 7x - 21$. Значит $6x \leq 7x - 21$, тогда $x \geq 21$.

Пример: 21 девочек быть могло, например, если мальчики танцевали с $21, 20, 19, 18, 17, 16, 15$ девочками. Пример для этого случая представлен в таблице. Пусть мальчики это М1-М7, девочки – это Д1-Д21, если мальчик и девочка танцуют, то в соответствующей клетке таблицы стоит 1, всего количество танцев равно 126:

	Д1	Д2	Д3	Д4	Д5	Д6	Д7	Д8	Д9	Д10	Д11	Д12	Д13	Д14	Д15	Д16	Д17	Д18	Д19	Д20	Д21
М1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
М2		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
М3	1			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
М4	1	1	1				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
М5	1	1	1	1	1	1					1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
М6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1						1	1	1	1	1	1
М7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1						

Тогда минимальное количество девочек, которые танцевали на этом балу, равно 21. При этом на балу станцевали 126 танцев.

Ответ: 21 девочка, 126 танцев.

За решение задачи **5 баллов**

Спринт. Вариант №1

#1186305

На стадионе Илья и Дима готовились к соревнованиям и решили устроить два тренировочных забега. Ребята вышли на старт прямолинейной беговой дорожки. Первым стартовал Дима, а через 20 секунд после этого вслед за ним стартовал Илья. Когда прошла еще минута, оказалось, что Дима пробежал уже половину длины этой беговой дорожки, а Илья только четверть. Немного отдохнув после первого забега, ребята начали второй забег. Теперь они решили побежать навстречу друг другу, стартуя одновременно с противоположных концов этой же беговой дорожки.

1. Через сколько секунд после старта Илья и Дима встретятся, если они побегут с теми же скоростями, что и в первом забеге? В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: $3{,}14$

Правильный ответ:

96

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

---

2. Чья скорость больше? Выберите имя мальчика.

- Илья
- Дима

1 балл

---

3. Во сколько раз скорость более быстрого мальчика больше скорости более медленного? В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: $3{,}14$

Правильный ответ:

1.5

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

Решение задачи:

Пусть длина всей беговой дорожки $4S$, тогда скорость Ильи $\frac{S}{60}$, а скорость Димы $\frac{2S}{20+60}=\frac{S}{40}$.

Их скорость сближения тогда $\frac{S}{60}+\frac{S}{40}=\frac{5S}{120}=\frac{S}{24}$.

Значит, во время второго забега дистанцию $4S$ они пробегут за $\frac{4S}{\frac{S}{24}}=96$ секунд. Причём Дима бежит быстрее, и его скорость в $\frac{S}{40}:\frac{S}{60}=1{,}5$ раза больше скорости Ильи.

Ответ: 96 секунд, Дима, в $1{,}5$ раза.

За решение задачи **5 баллов**

Спринт. Вариант №2

#1186306

На стадионе Илья и Дима готовились к соревнованиям и решили устроить два тренировочных забега. Ребята вышли на старт прямолинейной беговой дорожки. Первым стартовал Дима, а через 30 секунд после этого вслед за ним стартовал Илья. Когда прошло еще полторы минуты, оказалось, что Дима пробежал уже половину длины этой беговой дорожки, а Илья только четверть. Немного отдохнув после первого забега, ребята начали второй забег. Теперь они решили побежать навстречу друг другу, стартуя одновременно с противоположных концов этой же беговой дорожки.

$1.$ Через сколько секунд после старта Илья и Дима встретятся, если они побегут с теми же скоростями, что и в первом забеге? В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: $3{,}14$

Правильный ответ:

144

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

$2.$ Чья скорость больше? Выберите имя мальчика.

- Илья
- Дима

1 балл

$3.$ Во сколько раз скорость более быстрого мальчика больше скорости более медленного? В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: $3{,}14$

Правильный ответ:

1.5

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

Решение задачи:

Пусть длина всей беговой дорожки $4S$, тогда скорость Ильи $\frac{S}{90}$, а скорость Димы $\frac{2S}{30+90}=\frac{S}{60}$.

Их скорость сближения тогда $\frac{S}{90}+\frac{S}{60}=\frac{5S}{180}=\frac{S}{36}$.

Значит, во время второго забега дистанцию $4S$ они пробегут за $\frac{4S}{\frac{S}{36}}=144$ секунды. Причём Дима бежит быстрее, и его скорость в $\frac{S}{60}:\frac{S}{90}=1{,}5$ раза больше скорости Ильи.

Ответ: 144 секунд, Дима, в $1{,}5$ раза.

За решение задачи **5 баллов**

Спринт. Вариант №3

#1186308

На стадионе Илья и Дима готовились к соревнованиям и решили устроить два тренировочных забега. Ребята вышли на старт прямолинейной беговой дорожки. Первым стартовал Дима, а через 10 секунд после этого вслед за ним стартовал Илья. Когда прошло еще полминуты, оказалось, что Дима пробежал уже половину длины этой беговой дорожки, а Илья только четверть. Немного отдохнув после первого забега, ребята начали второй забег. Теперь они решили побежать навстречу друг другу, стартуя одновременно с противоположных концов этой же беговой дорожки.

1. Через сколько секунд после старта Илья и Дима встретятся, если они побегут с теми же скоростями, что и в первом забеге? В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: $3{,}14$

Правильный ответ:

48

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

2. Чья скорость больше? Выберите имя мальчика.

- Илья
- Дима

1 балл

3. Во сколько раз скорость более быстрого мальчика больше скорости более медленного? В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: $3{,}14$

Правильный ответ:

1.5

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

Решение задачи:

Пусть длина всей беговой дорожки $4S$, тогда скорость Ильи $\dfrac{S}{30}$, а скорость Димы $\dfrac{2S}{10+30}=\dfrac{S}{20}$.

Их скорость сближения тогда $\dfrac{S}{30}+\dfrac{S}{20}=\dfrac{5S}{60}=\dfrac{S}{12}$.

Значит, во время второго забега дистанцию $4S$ они пробегут за $\dfrac{4S}{\frac{S}{12}}=48$ секунд. Причём Дима бежит быстрее, и его скорость в $\dfrac{S}{20}:\dfrac{S}{30}=1{,}5$ раза больше скорости Ильи.

Ответ: 48 секунд, Дима, в $1{,}5$ раза.

За решение задачи **5 баллов**

Спринт. Вариант №4

#1186309

На стадионе Илья и Дима готовились к соревнованиям и решили устроить два тренировочных забега. Ребята вышли на старт прямолинейной беговой дорожки. Первым стартовал Дима, а через 5 секунд после этого вслед за ним стартовал Илья. Когда прошла еще четверть минуты, оказалось, что Дима пробежал уже половину длины этой беговой дорожки, а Илья только четверть. Немного отдохнув после первого забега, ребята начали второй забег. Теперь они решили побежать навстречу друг другу, стартуя одновременно с противоположных концов этой же беговой дорожки.

$1.$ Через сколько секунд после старта Илья и Дима встретятся, если они побегут с теми же скоростями, что и в первом забеге? В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: $3{,}14$

Правильный ответ:

24

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

$2.$ Чья скорость больше? Выберите имя мальчика.

- Илья
- Дима

1 балл

$3.$ Во сколько раз скорость более быстрого мальчика больше скорости более медленного? В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: $3{,}14$

Правильный ответ:

1.5

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

Решение задачи:

Пусть длина всей беговой дорожки $4S$, тогда скорость Ильи $\frac{S}{15}$, а скорость Димы $\frac{2S}{5+15}=\frac{S}{10}$.

Их скорость сближения тогда $\frac{S}{15}+\frac{S}{10}=\frac{5S}{30}=\frac{S}{6}$.

Значит, во время второго забега дистанцию $4S$ они пробегут за $\frac{4S}{\frac{S}{6}}=24$ секунды. Причём Дима бежит быстрее, и его скорость в $\frac{S}{15}:\frac{S}{10}=1{,}5$ раза больше скорости Ильи.

Ответ: 24 секунд, Дима, в $1{,}5$ раза.

За решение задачи **5 баллов**

Спринт. Вариант №5

#1186310

На стадионе Илья и Дима готовились к соревнованиям и решили устроить два тренировочных забега. Ребята вышли на старт прямолинейной беговой дорожки. Первым стартовал Дима, а через минуту после этого вслед за ним стартовал Илья. Когда прошло еще 30 секунд, оказалось, что Дима пробежал уже половину длины этой беговой дорожки, а Илья только четверть. Немного отдохнув после первого забега, ребята начали второй забег. Теперь они решили побежать навстречу друг другу, стартуя одновременно с противоположных концов этой же беговой дорожки.

1. Через сколько секунд после старта Илья и Дима встретятся, если они побегут с теми же скоростями, что и в первом забеге? В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: $3{,}14$

Правильный ответ:

72

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

---

2. Чья скорость больше? Выберите имя мальчика.

- Илья
- Дима

1 балл

---

3. Во сколько раз скорость более быстрого мальчика больше скорости более медленного? В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: $3{,}14$

Правильный ответ:

1.5

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

Решение задачи:

Пусть длина всей беговой дорожки $4S$, тогда скорость Ильи $\dfrac{S}{30}$, а скорость Димы $\dfrac{2S}{30+60}=\dfrac{S}{45}$.

Их скорость сближения тогда $\dfrac{S}{30}+\dfrac{S}{45}=\dfrac{5S}{90}=\dfrac{S}{18}$.

Значит, во время второго забега дистанцию $4S$ они пробегут за $\dfrac{4S}{\frac{S}{18}}=72$ секунды. Причём Илья бежит быстрее, и его скорость в $\dfrac{S}{20}:\dfrac{S}{30}=1{,}5$ раза больше скорости Димы.

Ответ: 72 секунды, Илья, в $1{,}5$ раза.

За решение задачи **5 баллов**

Футбол. Вариант №1

#1186313

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

Придя на тренировку по футболу, Дима не поздоровался с четвертью ребят из секции, не считая себя. Один из тех ребят, с кем он поздоровался, Серёжа, сам поздоровался с одной седьмой от тех футболистов, с кем поздоровался Дима, не считая себя.

1. Какое минимальное количество ребят могло быть в этой секции?

Правильный ответ:

21

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

---

2. С каким количеством ребят из секции не поздоровался Дима (при условии минимальности количества ребят в секции)?

Правильный ответ:

5

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

---

3. С каким количеством ребят из тех, с кем поздоровался Дима, не поздоровался Серёжа (при условии минимальности количества ребят в секции)?

Правильный ответ:

12

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

Решение задачи:

Пусть Серёжа поздоровался с x людьми. Тогда Дима поздоровался с $7x+1$ людьми, и это будет $\dfrac{3}{4}$ всех ребят секции, не считая Диму. Значит, общее число ребят в секции, не считая Диму составляет $(7x+1)\cdot\dfrac{4}{3}$. Следовательно, $7x+1$ должно делиться на 3, тогда минимальное возможное значение $x=2$. Тогда минимальное количество ребят в этой секции могло быть равно $(7x+1)\cdot\dfrac{4}{3}+1=(7\cdot2+1)\cdot\dfrac{4}{3}+1=21$. При этом Дима не поздоровался с $(21-1):4=5$ ребятами, а Серёжа не поздоровался с $\left((21-1)\cdot\dfrac{3}{4}-1\right)\cdot\dfrac{6}{7}=12$ ребятами (из тех, с кем поздоровался Дима).

Ответ: $21, 5, 12$.

За решение задачи **5 баллов**

Футбол. Вариант №2

#1186315

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

Придя на тренировку по футболу, Дима не поздоровался с четвертью ребят из секции, не считая себя. Один из тех ребят, с кем он поздоровался, Серёжа, сам поздоровался с одной пятой от тех футболистов, с кем поздоровался Дима, не считая себя.

$1.$ Какое минимальное количество ребят могло быть в этой секции?

Правильный ответ:

9

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

$2.$ С каким количеством ребят из секции не поздоровался Дима (при условии минимальности количества ребят в секции)?

Правильный ответ:

2

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

$3.$ С каким количеством ребят из тех, с кем поздоровался Дима, не поздоровался Серёжа (при условии минимальности количества ребят в секции)?

Правильный ответ:

4

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

Решение задачи:

Пусть Серёжа поздоровался с x людьми. Тогда Дима поздоровался с $5x+1$ людьми, и это будет $\frac{3}{4}$ всех ребят секции, не считая Диму. Значит, общее число ребят в секции, не считая Диму составляет $(5x+1)\cdot\frac{4}{3}$. Следовательно, $5x+1$ должно делиться на 3, тогда минимальное возможное значение $x=1$. Тогда минимальное количество ребят в этой секции могло быть равно $(5x+1)\cdot\frac{4}{3}+1=(5\cdot 1+1)\cdot\frac{4}{3}+1=9$. При этом Дима не поздоровался с $(9-1):4=2$ ребятами, а Серёжа не поздоровался с $\left((9-1)\cdot\frac{3}{4}-1\right)\cdot\frac{4}{5}=4$ ребятами (из тех, с кем поздоровался Дима).

Ответ: $9, 2, 4$.

За решение задачи **5 баллов**

Футбол. Вариант №3

#1186316

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

Придя на тренировку по футболу, Дима не поздоровался с четвертью ребят из секции, не считая себя. Один из тех ребят, с кем он поздоровался, Серёжа, сам поздоровался с одной четвёртой от тех футболистов, с кем поздоровался Дима, не считая себя.

1. Какое минимальное количество ребят могло быть в этой секции?

Правильный ответ:

13

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

2. С каким количеством ребят из секции не поздоровался Дима (при условии минимальности количества ребят в секции)?

Правильный ответ:

3

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

3. С каким количеством ребят из тех, с кем поздоровался Дима, не поздоровался Серёжа (при условии минимальности количества ребят в секции)?

Правильный ответ:

6

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

Решение задачи:

Пусть Серёжа поздоровался с x людьми. Тогда Дима поздоровался с $4x+1$ людьми, и это будет $\frac{3}{4}$ всех ребят секции, не считая Диму. Значит, общее число ребят в секции, не считая Диму составляет $(4x+1)\cdot\frac{4}{3}$. Следовательно, $4x+1$ должно делиться на 3, тогда минимальное возможное значение $x=2$. Тогда минимальное количество ребят в этой секции могло быть равно $(4x+1)\cdot\frac{4}{3}+1=(4\cdot 2+1)\cdot\frac{4}{3}+1=13$. При этом Дима не поздоровался с $(13-1):4=3$ ребятами, а Серёжа не поздоровался с $\left((13-1)\cdot\frac{3}{4}-1\right)\cdot\frac{3}{4}=6$ ребятами (из тех, с кем поздоровался Дима).

Ответ: $13, 3, 6$.

За решение задачи **5 баллов**

Футбол. Вариант №4

#1186317

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

Придя на тренировку по футболу, Дима не поздоровался с одной шестой ребят из секции, не считая себя. Один из тех ребят, с кем он поздоровался, Серёжа, сам поздоровался с одной седьмой от тех футболистов, с кем поздоровался Дима, не считая себя.

1. Какое минимальное количество ребят могло быть в этой секции?

Правильный ответ:

19

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

2. С каким количеством ребят из секции не поздоровался Дима (при условии минимальности количества ребят в секции)?

Правильный ответ:

3

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

3. С каким количеством ребят из тех, с кем поздоровался Дима, не поздоровался Серёжа (при условии минимальности количества ребят в секции)?

Правильный ответ:

12

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

Решение задачи:

Пусть Серёжа поздоровался с x людьми. Тогда Дима поздоровался с $7x+1$ людьми, и это будет $\frac{5}{6}$ всех ребят секции, не считая Диму. Значит, общее число ребят в секции, не считая Диму составляет $(7x+1)\cdot\frac{6}{5}$. Следовательно, $7x+1$ должно делиться на 5, тогда минимальное возможное значение $x=2$. Тогда минимальное количество ребят в этой секции могло быть равно $(7x+1)\cdot\frac{6}{5}+1=(7\cdot 2+1)\cdot\frac{6}{5}+1=19$. При этом Дима не поздоровался с $(19-1):6=3$ ребятами, а Серёжа не поздоровался с $\left((19-1)\cdot\frac{5}{6}-1\right)\cdot\frac{6}{7}=12$ ребятами (из тех, с кем поздоровался Дима).

Ответ: $19, 3, 12$.

За решение задачи **5 баллов**

Футбол. Вариант №5

#1186318

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

Придя на тренировку по футболу, Дима не поздоровался с одной пятой ребят из секции, не считая себя. Один из тех ребят, с кем он поздоровался, Серёжа, сам поздоровался с одной седьмой от тех футболистов, с кем поздоровался Дима, не считая себя.

1. Какое минимальное количество ребят могло быть в этой секции?

Правильный ответ:

11

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

2. С каким количеством ребят из секции не поздоровался Дима (при условии минимальности количества ребят в секции)?

Правильный ответ:

2

Формула вычисления баллов: 0-2 1-0

2 балла

3. С каким количеством ребят из тех, с кем поздоровался Дима, не поздоровался Серёжа (при условии минимальности количества ребят в секции)?

Правильный ответ:

6

Формула вычисления баллов: 0-1 1-0

1 балл

Решение задачи:

Пусть Серёжа поздоровался с x людьми. Тогда Дима поздоровался с $7x+1$ людьми, и это будет $\frac{4}{5}$ всех ребят секции, не считая Диму. Значит, общее число ребят в секции, не считая Диму составляет $(7x+1)\cdot\frac{5}{4}$. Следовательно, $7x+1$ должно делиться на 4, тогда минимальное возможное значение $x=1$. Тогда минимальное количество ребят в этой секции могло быть равно $(7x+1)\cdot\frac{5}{4}+1=(7\cdot1+1)\cdot\frac{5}{4}+1=11$. При этом Дима не поздоровался с $(11-1):5=2$ ребятами, а Серёжа не поздоровался с $\left((11-1)\cdot\frac{4}{5}-1\right)\cdot\frac{6}{7}=6$ ребятами (из тех, с кем поздоровался Дима).

Ответ: $11, 2, 6$.

За решение задачи **5 баллов**

Два подряд. Вариант №1

#1186320

У трёхзначного числа N было четыре натуральных делителя. Его записали два раза подряд без пробелов и у полученного числа оказалось уже 18 натуральных делителей. Каким могло быть исходное число N? Найдите все варианты.

В качестве ответа вводите натуральное число. Если вариантов ответа несколько, запишите их в порядке возрастания без пробелов, знаков препинания и иных символов. Пример: 120130

Правильный ответ:

143

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Когда трёхзначное число записали два раза подряд, получили новое число вида

$1000 \cdot N + N = 1001 \cdot N = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot N.$

Значит, полученное после дописывания число обязательно имеет среди своих простых делителей $7, 11$ и 13.

Поскольку у исходного числа N всего четыре натуральных делителя, то оно является произведением некоторых двух простых чисел a и b (и имеет делители вида: $1, a, b, ab$). Значит, все три числа $7, 11, 13$ не могут быть делителями исходного трёхзначного числа N.

Если бы ни 7, ни 11, ни 13 не были делителями исходного трёхзначного числа N, то после дописывания число имело бы вид $a \cdot b \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, и количество делителей должно было бы стать $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$. Значит, это не так.

Если бы ровно одно из чисел $7, 11, 13$ было делителем исходного трёхзначного числа N, то после дописывания число имело бы вид $a^2 \cdot b \cdot m \cdot n$, и количество делителей должно было бы стать $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$. Значит, это не так.

Если же у исходного трёхзначного числа N было ровно два делителя из этого списка, то после дописывания число имело бы вид $a^2 \cdot b^2 \cdot n$, и количество делителей должно было бы стать $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.

Значит, исходное трёхзначное число N должно быть произведением двух из этих трёх простых делителей. Рассмотрим варианты:

$7 \cdot 11 = 77,$

$7 \cdot 13 = 91,$

$11 \cdot 13 = 143.$

Трёхзначным из них является только 143. Других вариантов нет.

Ответ: 143.

За решение задачи **5 баллов**

Два подряд. Вариант №2

#1186322

У трёхзначного числа N было три натуральных делителя. Его записали два раза подряд без пробелов и у полученного числа оказалось уже 16 натуральных делителей. Каким могло быть исходное число N? Найдите все варианты.

В качестве ответа вводите натуральное число. Если вариантов ответа несколько, запишите их в порядке возрастания без пробелов, знаков препинания и иных символов. Пример: 120130

Правильный ответ:

121169

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Когда трёхзначное число записали два раза подряд, получили новое число вида

$1000 \cdot N + N = 1001 \cdot N = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot N.$

Значит, полученное после дописывания число обязательно имеет среди своих простых делителей $7, 11$ и 13.

Поскольку у исходного числа N всего три натуральных делителя, то оно является квадратом некоторого числа a (и имеет делители вида: $1, a, a^2$). Значит, все три числа $7, 11, 13$ не могут быть делителями исходного трёхзначного числа N. Кроме того, ровно два делителя из этого списка не могут быть делителями исходного трёхзначного числа N.

Если бы ни 7, ни 11, ни 13 не были делителями исходного трёхзначного числа N, то после дописывания число имело бы вид $a^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, и количество делителей должно было бы стать $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 18$. Значит, это не так.

Если бы ровно одно из чисел $7, 11, 13$ было делителем исходного трёхзначного числа N, то после дописывания число имело бы вид $a^3 \cdot m \cdot n$, и количество делителей должно было бы стать $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Значит, исходное трёхзначное число N должно быть квадратом одного из этих трёх простых делителей. Рассмотрим варианты:

$7^2 = 49,$

$11^2 = 121,$

$13^2 = 169.$

Трёхзначными из них являются 121 и 169. Других вариантов нет.

Ответ: 121169.

За решение задачи **5 баллов**

Два подряд. Вариант №3

#1186323

У трёхзначного числа N было шесть натуральных делителей. Его записали два раза подряд без пробелов и у полученного числа оказалось уже 24 натуральных делителя. Каким могло быть исходное число N? Найдите все варианты. В ответ запишите наименьшее из полученных чисел.

В качестве ответа вводите натуральное число без пробелов, знаков препинания и иных символов. Пример: 120

Правильный ответ:

539

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Когда трёхзначное число записали два раза подряд, получили новое число вида

$1000 \cdot N + N = 1001 \cdot N = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot N.$

Значит, полученное после дописывания число обязательно имеет среди своих простых делителей $7, 11$ и 13.

Поскольку у исходного числа N всего шесть натуральных делителей, то оно или является пятой степенью некоторого простого числа и имеет вид c^5 (и имеет делители вида: $1,\ \ c,\ \ c^2,\ c^3,\ c^4,\ c^5$), или является произведением квадрата некоторого простого числа a и некоторого простого числа b (и имеет делители вида: $1,\ a,\ b,\ a^2,\ ab,\ a^2b$). Значит, все три числа $7, 11, 13$ не могут быть делителями исходного трёхзначного числа N ни в одном из этих случаев.

Рассмотрим первый случай.

Если бы ни 7, ни 11, ни 13 не были делителями исходного трёхзначного числа N, то после дописывания число имело бы вид $c^{\,5} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, и количество делителей должно было бы стать $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$. Значит, это не так.

Если бы ровно одно из чисел $7, 11, 13$ было делителем исходного трёхзначного числа N, то после дописывания число или имело бы вид $c^{\,6} \cdot m \cdot n$, и количество делителей должно было бы стать $7 \cdot 2 \cdot 2 = 28$. Значит, это не так.

Ровно два числа из $7, 11, 13$ не могут быть делителями исходного трёхзначного числа N, если $N = c^5$.

Рассмотрим второй случай.

Если бы ни 7, ни 11, ни 13 не были делителями исходного трёхзначного числа N, то после дописывания число имело бы вид $a^2 \cdot b \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, и количество делителей должно было бы стать $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$. Значит, это не так.

Если бы ровно одно из чисел $7, 11, 13$ было делителем исходного трёхзначного числа N, то после дописывания число или имело бы вид $a^3 \cdot b \cdot m \cdot n$, и количество делителей должно было бы стать $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, или имело бы вид $a^2 \cdot b^2 \cdot m \cdot n$, и количество делителей должно было бы стать $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$. Значит, это не так.

Если же у исходного трёхзначного числа N было ровно два делителя из этого списка, то после дописывания число имело бы вид $a^3 \cdot b^2 \cdot n$, и количество делителей должно было бы стать $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Значит, исходное трёхзначное числоN должно быть произведением квадрата одного из этих трёх простых делителей и другого простого делителя. Рассмотрим варианты:

$7^2 \cdot 11 = 539, 7^2 \cdot 13 = 637, 11^2 \cdot 7 = 847, 11^2 \cdot 13 = 1573, 13^2 \cdot 7 = 1183, 13^2 \cdot 11 = 1859.$

Трёхзначными из них являются только $539, 637, 847$. Других вариантов нет.

Ответ: 539.

За решение задачи **5 баллов**

Два подряд. Вариант №4

#1186325

У трёхзначного числа N было шесть натуральных делителей. Его записали два раза подряд без пробелов и у полученного числа оказалось уже 24 натуральных делителя. Каким могло быть исходное число N? Найдите все варианты. В ответ запишите наибольшее из полученных чисел.

В качестве ответа вводите натуральное число без пробелов, знаков препинания и иных символов. Пример: 120

Правильный ответ:

847

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Когда трёхзначное число записали два раза подряд, получили новое число вида

$1000 \cdot N + N = 1001 \cdot N = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot N.$

Значит, полученное после дописывания число обязательно имеет среди своих простых делителей $7, 11$ и 13.

Поскольку у исходного числа N всего шесть натуральных делителей, то оно или является пятой степенью некоторого простого числа и имеет вид c^5 (и имеет делители вида: $1,\ \ c,\ \ c^2,\ c^3,\ c^4,\ \ c^5$), или является произведением квадрата некоторого простого числа a и некоторого простого числа b (и имеет делители вида: $1,\ a,\ b,\ a^2,\ ab,\ a^2b$). Значит, все три числа $7, 11, 13$ не могут быть делителями исходного трёхзначного числа N ни в одном из этих случаев.

Рассмотрим первый случай.

Если бы ни 7, ни 11, ни 13 не были делителями исходного трёхзначного числа N, то после дописывания число имело бы вид $c^5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, и количество делителей должно было бы стать $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$. Значит, это не так.

Если бы ровно одно из чисел $7, 11, 13$ было делителем исходного трёхзначного числа N, то после дописывания число или имело бы вид $c^6 \cdot m \cdot n$, и количество делителей должно было бы стать $7 \cdot 2 \cdot 2 = 28$. Значит, это не так.

Ровно два числа из $7, 11, 13$ не могут быть делителями исходного трёхзначного числа N, если $N = c^5$.

Рассмотрим второй случай.

Если бы ни 7, ни 11, ни 13 не были делителями исходного трёхзначного числа N, то после дописывания число имело бы вид $a^2 \cdot b \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, и количество делителей должно было бы стать $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$. Значит, это не так.

Если бы ровно одно из чисел $7, 11, 13$ было делителем исходного трёхзначного числа N, то после дописывания число или имело бы вид $a^3 \cdot b \cdot m \cdot n$, и количество делителей должно было бы стать $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, или имело бы вид $a^2 \cdot b^2 \cdot m \cdot n$, и количество делителей должно было бы стать $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$. Значит, это не так.

Если же у исходного трёхзначного числа N было ровно два делителя из этого списка, то после дописывания число имело бы вид $a^3 \cdot b^2 \cdot n$, и количество делителей должно было бы стать $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Значит, исходное трёхзначное число N должно быть произведением квадрата одного из этих трёх простых делителей и другого простого делителя. Рассмотрим варианты:

$7^2 \cdot 11 = 539, 7^2 \cdot 13 = 637, 11^2 \cdot 7 = 847, 11^2 \cdot 13 = 1573, 13^2 \cdot 7 = 1183, 13^2 \cdot 11 = 1859.$

Трёхзначными из них являются только $539, 637, 847$. Других вариантов нет.

Ответ: 847.

За решение задачи **5 баллов**

Два подряд. Вариант №5

#1186327

У трёхзначного числа N было шесть натуральных делителей. Его записали два раза подряд без пробелов и у полученного числа оказалось уже 24 натуральных делителя. Каким могло быть исходное число N? Найдите все варианты.

В качестве ответа вводите натуральное число. Если вариантов ответа несколько, запишите их в порядке возрастания без пробелов, знаков препинания и иных символов. Пример: 120130

Правильный ответ:

539637847

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Когда трёхзначное число записали два раза подряд, получили новое число вида

$1000 \cdot N + N = 1001 \cdot N = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot N.$

Значит, полученное после дописывания число обязательно имеет среди своих простых делителей $7, 11$ и 13.

Поскольку у исходного числа N всего шесть натуральных делителей, то оно или является пятой степенью некоторого простого числа и имеет вид c^5 (и имеет делители вида: $1,\ \ c,\, c^2,\, c^3,\, c^4,\ \ c^5$), или является произведением квадрата некоторого простого числа a и некоторого простого числа b (и имеет делители вида: $1,\, a,\, b,\, a^2,\, ab,\, a^2b$). Значит, все три числа $7, 11, 13$ не могут быть делителями исходного трёхзначного числа N ни в одном из этих случаев.

Рассмотрим первый случай.

Если бы ни 7, ни 11, ни 13 не были делителями исходного трёхзначного числа N, то после дописывания число имело бы вид $c^{\,5} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, и количество делителей должно было бы стать $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$. Значит, это не так.

Если бы ровно одно из чисел $7, 11, 13$ было делителем исходного трёхзначного числа N, то после дописывания число или имело бы вид $c^{\,6} \cdot m \cdot n$, и количество делителей должно было бы стать $7 \cdot 2 \cdot 2 = 28$. Значит, это не так.

Ровно два числа из $7, 11, 13$ не могут быть делителями исходного трёхзначного числа N, если $N = c^5$.

Рассмотрим второй случай.

Если бы ни 7, ни 11, ни 13 не были делителями исходного трёхзначного числа N, то после дописывания число имело бы вид $a^2 \cdot b \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, и количество делителей должно было бы стать $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$. Значит, это не так.

Если бы ровно одно из чисел $7, 11, 13$ было делителем исходного трёхзначного числа N, то после дописывания число или имело бы вид $a^3 \cdot b \cdot m \cdot n$, и количество делителей должно было бы стать $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, или имело бы вид $a^2 \cdot b^2 \cdot m \cdot n$, и количество делителей должно было бы стать $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$. Значит, это не так.

Если же у исходного трёхзначного числа N было ровно два делителя из этого списка, то после дописывания число имело бы вид $a^3 \cdot b^2 \cdot n$, и количество делителей должно было бы стать $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Значит, исходное трёхзначное число N должно быть произведением квадрата одного из этих трёх простых делителей и другого простого делителя. Рассмотрим варианты:

$7^2 \cdot 11 = 539, 7^2 \cdot 13 = 637, 11^2 \cdot 7 = 847, 11^2 \cdot 13 = 1573, 13^2 \cdot 7 = 1183, 13^2 \cdot 11 = 1859.$

Трёхзначными из них являются только $539, 637, 847$. Других вариантов нет.

Ответ: 539637847.

За решение задачи **5 баллов**

Кинопоказ. Вариант №1

#1186328

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

Зал кинотеатра представляет собой прямоугольник $6{\times}8$ мест. На сеанс привели класс, в котором учатся отличники и хулиганы. Отличники всегда говорят правду, хулиганы всегда лгут. Считается, что два человека сидят рядом, если они занимают места соседние по стороне или по диагонали. Каждый школьник сказал фразу: «Рядом со мной сидит хулиган». Какое наибольшее количество хулиганов может присутствовать на сеансе?

Правильный ответ:

12

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Оценка. Разобьем прямоугольник на квадраты $2{\times}2$. В каждом квадрате не может сидеть более одного хулигана (иначе они скажут правду). Значит всего хулиганов не больше, чем квадратов, то есть 12. Пример: разобьём исходный прямоугольник на 12 квадратов $2{\times}2$ и разместим по одному хулигану в левом нижнем углу каждого квадрата, итого 12 хулиганов.

Ответ: 12.

За решение задачи 5 баллов

Кинопоказ. Вариант №2

#1186329

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

Зал кинотеатра представляет собой прямоугольник $6{\times}10$ мест. На сеанс привели класс, в котором учатся отличники и хулиганы. Отличники всегда говорят правду, хулиганы всегда лгут. Считается, что два человека сидят рядом, если они занимают места соседние по стороне или по диагонали. Каждый школьник сказал фразу: «Рядом со мной сидит хулиган». Какое наибольшее количество хулиганов может присутствовать на сеансе?

Правильный ответ:

15

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Оценка. Разобьем прямоугольник на квадраты $2{\times}2$. В каждом квадрате не может сидеть более одного хулигана (иначе они скажут правду). Значит всего хулиганов не больше, чем квадратов, то есть 15. Пример: разобьём исходный прямоугольник на 15 квадратов $2{\times}2$ и разместим по одному хулигану в левом нижнем углу каждого квадрата, итого 15 хулиганов.

Ответ: 15.

За решение задачи 5 баллов

Кинопоказ. Вариант №3

#1186330

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

Зал кинотеатра представляет собой прямоугольник 4×8 мест. На сеанс привели класс, в котором учатся отличники и хулиганы. Отличники всегда говорят правду, хулиганы всегда лгут. Считается, что два человека сидят рядом, если они занимают места соседние по стороне или по диагонали. Каждый школьник сказал фразу: «Рядом со мной сидит хулиган». Какое наибольшее количество хулиганов может присутствовать на сеансе?

Правильный ответ:

8

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Оценка. Разобьем прямоугольник на квадраты 2×2. В каждом квадрате не может сидеть более одного хулигана (иначе они скажут правду). Значит всего хулиганов не больше, чем квадратов, то есть 8. Пример: разобьём исходный прямоугольник на 8 квадратов 2×2 и разместим по одному хулигану в левом нижнем углу каждого квадрата, итого 8 хулиганов.

Ответ:8.

За решение задачи **5 баллов**

Кинопоказ. Вариант №4

#1186331

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

Зал кинотеатра представляет собой прямоугольник 8×10 мест. На сеанс привели класс, в котором учатся отличники и хулиганы. Отличники всегда говорят правду, хулиганы всегда лгут. Считается, что два человека сидят рядом, если они занимают места соседние по стороне или по диагонали. Каждый школьник сказал фразу: «Рядом со мной сидит хулиган». Какое наибольшее количество хулиганов может присутствовать на сеансе?

Правильный ответ:

20

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Оценка. Разобьем прямоугольник на квадраты 2×2. В каждом квадрате не может сидеть более одного хулигана (иначе они скажут правду). Значит всего хулиганов не больше, чем квадратов, то есть 20. Пример: разобьём исходный прямоугольник на 20 квадратов 2×2 и разместим по одному хулигану в левом нижнем углу каждого квадрата, итого 20 хулиганов.

Ответ: 20.

За решение задачи **5 баллов**

Кинопоказ. Вариант №5

#1186332

В качестве ответа вводите натуральное число. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 25

Зал кинотеатра представляет собой прямоугольник 4×10 мест. На сеанс привели класс, в котором учатся отличники и хулиганы. Отличники всегда говорят правду, хулиганы всегда лгут. Считается, что два человека сидят рядом, если они занимают места соседние по стороне или по диагонали. Каждый школьник сказал фразу: «Рядом со мной сидит хулиган». Какое наибольшее количество хулиганов может присутствовать на сеансе?

Правильный ответ:

10

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Оценка. Разобьем прямоугольник на квадраты 2×2. В каждом квадрате не может сидеть более одного хулигана (иначе они скажут правду). Значит всего хулиганов не больше, чем квадратов, то есть 10. Пример: разобьём исходный прямоугольник на 10 квадратов 2×2 и разместим по одному хулигану в левом нижнем углу каждого квадрата, итого 10 хулиганов.

Ответ: 10.

За решение задачи **5 баллов**

Сколько будет?. Вариант №1

#1186335

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

Найдите значение выражения в численном виде:

$$(2^{30}(2^{15}+1)^2-2^{45}(2^{15}+1)-2^{45}-4):((2^{15}+3)^2-(2^{30}+2^{17}+4)-2^{15}-3)$$

Правильный ответ:

32766

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Пусть $2^{15}=a$, тогда дробь примет вид:

$$\frac{a^2(a+1)^2-a^3(a+1)-a^3-4}{(a+3)^2-(a^2+4a+4)-a-3}=$$

$$=\frac{a^4+2a^3+a^2-a^4-a^3-a^3-4}{a^2+6a+9-a^2-4a-4-a-3}=$$

$$=\frac{a^2-4}{a+2}=a-2$$

Учитывая, что $a=2^{15}$, тогда значение выражения будет равно $2^{15}-2=32766$

Ответ: 32766.

За решение задачи **5 баллов**

Сколько будет?. Вариант №2

#1186338

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

Найдите значение выражения в численном виде:

$$(2^{20}(2^{10}+1)^2-2^{30}(2^{10}+1)-2^{30}-4):((2^{10}+3)^2-(2^{20}+2^{12}+4)-2^{10}-3)$$

Правильный ответ:

1022

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Пусть $2^{10}=a$, тогда дробь примет вид:

$$\frac{a^2(a+1)^2-a^3(a+1)-a^3-4}{(a+3)^2-(a^2+4a+4)-a-3}=$$

$$=\frac{a^4+2a^3+a^2-a^4-a^3-a^3-4}{a^2+6a+9-a^2-4a-4-a-3}=$$

$$=\frac{a^2-4}{a+2}=a-2$$

Учитывая, что $a=2^{10}$, тогда значение выражения будет равно $2^{10}-2=1022$

Ответ: 1022.

За решение задачи **5 баллов**

Сколько будет?. Вариант №3

#1186339

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

Найдите значение выражения в численном виде:

$$(2^{24}(2^{12}+1)^2-2^{36}(2^{12}+1)-2^{36}-4):((2^{12}+3)^2-(2^{24}+2^{14}+4)-2^{12}-3)$$

Правильный ответ:

4094

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Пусть $2^{12}=a$, тогда дробь примет вид:

$$\frac{a^2(a+1)^2-a^3(a+1)-a^3-4}{(a+3)^2-(a^2+4a+4)-a-3}=$$

$$=\frac{a^4+2a^3+a^2-a^4-a^3-a^3-4}{a^2+6a+9-a^2-4a-4-a-3}=$$

$$=\frac{a^2-4}{a+2}=a-2$$

Учитывая, что $a=2^{12}$, тогда значение выражения будет равно $2^{12}-2=4094$

Ответ: 4094.

За решение задачи **5 баллов**

Сколько будет?. Вариант №4

#1186340

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

Найдите значение выражения в численном виде:

$$(2^{22}(2^{11}+1)^2-2^{33}(2^{11}+1)-2^{33}-4):((2^{11}+3)^2-(2^{22}+2^{13}+4)-2^{11}-3)$$

Правильный ответ:

2046

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Пусть $2^{11}=a$, тогда дробь примет вид:

$$\frac{a^2(a+1)^2-a^3(a+1)-a^3-4}{(a+3)^2-(a^2+4a+4)-a-3}=$$

$$=\frac{a^4+2a^3+a^2-a^4-a^3-a^3-4}{a^2+6a+9-a^2-4a-4-a-3}=$$

$$=\frac{a^2-4}{a+2}=a-2$$

Учитывая, что $a=2^{11}$, тогда значение выражения будет равно $2^{11}-2=2046$

Ответ: 2046.

За решение задачи **5 баллов**

Сколько будет?. Вариант №5

#1186342

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

Найдите значение выражения в численном виде:

$$(2^{28}(2^{14}+1)^2-2^{42}(2^{14}+1)-2^{42}-4):((2^{14}+3)^2-(2^{28}+2^{16}+4)-2^{14}-3)$$

Правильный ответ:

16382

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Пусть $2^{14}=a$, тогда дробь примет вид:

$$\frac{a^2(a+1)^2-a^3(a+1)-a^3-4}{(a+3)^2-(a^2+4a+4)-a-3}=$$

$$=\frac{a^4+2a^3+a^2-a^4-a^3-a^3-4}{a^2+6a+9-a^2-4a-4-a-3}=$$

$$=\frac{a^2-4}{a+2}=a-2$$

Учитывая, что $a=2^{14}$, тогда значение выражения будет равно $2^{14}-2=16382$

Ответ: 16382.

За решение задачи **5 баллов**

Загадочный треугольник. Вариант №1

#1186344

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

На медиане CM треугольника ABC выбрана точка P так, что угол APM — прямой. Точка Q лежит на отрезке PC, причем $CQ = 4$ и $PM = 2$. Известно также, что $AC = 5$. Найдите BQ.

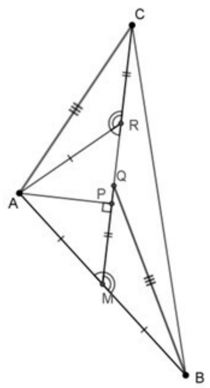
Правильный ответ:

5

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Отметим на луче PC такую точку R, что $PR = MP = 2$ (см. рисунок). Тогда $AR = AM$ (так как прямоугольные треугольники APM и APR равны по двум катетам). Значит, $\triangle ARM$ равнобедренный, откуда $\angle AMR = \angle ARM$. Следовательно, $\angle BMQ = \angle ARC$, так как смежные с ними углы равны. Кроме того, длины отрезков RC и MQ равны. Тогда треугольники ARC и BMQ равны по первому признаку равенства треугольников. Тогда $BQ = AC = 5$.



Ответ: 5.

За решение задачи **5 баллов**

Загадочный треугольник. Вариант №2

#1186346

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

На медиане CM треугольника ABC выбрана точка P так, что угол APM — прямой. Точка Q лежит на отрезке PC, причем $CQ = 8$ и $PM = 4$. Известно также, что $AC = 10$. Найдите BQ.

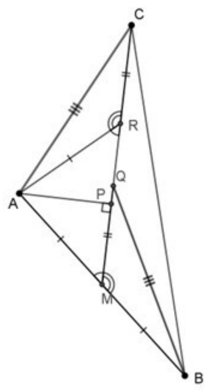
Правильный ответ:

10

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Отметим на луче PC такую точку R, что $PR = MP = 4$ (см. рисунок). Тогда $AR = AM$ (так как прямоугольные треугольники APM и APR равны по двум катетам). Значит, $\triangle ARM$ равнобедренный, откуда $\angle AMR = \angle ARM$. Следовательно, $\angle BMQ = \angle ARC$, так как смежные с ними углы равны. Кроме того, длины отрезков RC и MQ равны. Тогда треугольники ARC и BMQ равны по первому признаку равенства треугольников. Тогда $BQ = AC = 10$.



Ответ: 10.

За решение задачи **5 баллов**

Загадочный треугольник. Вариант №3

#1186349

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

На медиане CM треугольника ABC выбрана точка P так, что угол APM – прямой. Точка Q лежит на отрезке PC, причем $CQ = 12$ и $PM = 6$. Известно также, что $AC = 15$. Найдите BQ.

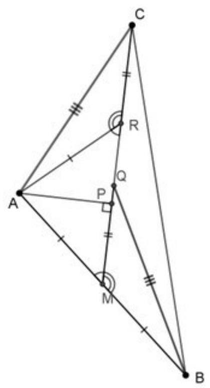
Правильный ответ:

15

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Отметим на луче PC такую точку R, что $PR = MP = 6$ (см. рисунок). Тогда $AR = AM$ (так как прямоугольные треугольники APM и APR равны по двум катетам). Значит, $\triangle ARM$ равнобедренный, откуда $\angle AMR = \angle ARM$. Следовательно, $\angle BMQ = \angle ARC$, так как смежные с ними углы равны. Кроме того, длины отрезков RC и MQ равны. Тогда треугольники ARC и BMQ равны по первому признаку равенства треугольников. Тогда $BQ = AC = 15$.



Ответ: 15.

За решение задачи **5 баллов**

Загадочный треугольник. Вариант №4

#1186350

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

На медиане CM треугольника ABC выбрана точка P так, что угол APM – прямой. Точка Q лежит на отрезке PC, причем $CQ = 16$ и $PM = 8$. Известно также, что $AC = 20$. Найдите BQ.

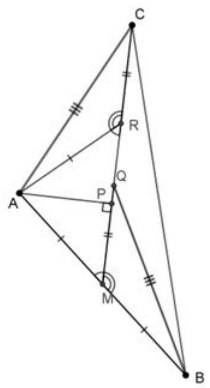
Правильный ответ:

20

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Отметим на луче PC такую точку R, что $PR = MP = 8$ (см. рисунок). Тогда $AR = AM$ (так как прямоугольные треугольники APM и APR равны по двум катетам). Значит, $\triangle ARM$ равнобедренный, откуда $\angle AMR = \angle ARM$. Следовательно, $\angle BMQ = \angle ARC$, так как смежные с ними углы равны. Кроме того, длины отрезков RC и MQ равны. Тогда треугольники ARC и BMQ равны по первому признаку равенства треугольников. Тогда $BQ = AC = 20$.



Ответ: 20.

За решение задачи **5 баллов**

Загадочный треугольник. Вариант №5

#1186351

В качестве ответа вводите число. Если ответом является бесконечная десятичная дробь, округлите её до сотых. В качестве разделителя целой и дробной частей используйте точку либо запятую. Никаких иных символов, кроме используемых для записи числа (в частности, пробелов), быть не должно. Пример: 3,14

На медиане CM треугольника ABC выбрана точка P так, что угол APM – прямой. Точка Q лежит на отрезке PC, причем $CQ = 0{,}8$ и $PM = 0{,}4$. Известно также, что $AC = 1$. Найдите BQ.

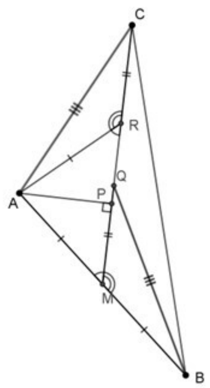
Правильный ответ:

1

Формула вычисления баллов: 0-5 1-0

Решение задачи:

Отметим на луче PC такую точку R, что $PR = MP = 0{,}4$ (см. рисунок). Тогда $AR = AM$ (так как прямоугольные треугольники APM и APR равны по двум катетам). Значит, $\triangle ARM$ равнобедренный, откуда $\angle AMR = \angle ARM$. Следовательно, $\angle BMQ = \angle ARC$, так как смежные с ними углы равны. Кроме того, длины отрезков RC и MQ равны. Тогда треугольники ARC и BMQ равны по первому признаку равенства треугольников. Тогда $BQ = AC = 1$.



Ответ: 1.

За решение задачи **5 баллов**