ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2025-2026 учебный год

Ответы и решения

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное. Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части, – решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Авторы задач и составители – Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, А.Д. Терёшин.

Задача 5.3 была предложена Д.Н. Оскорбиным, 6.2 – С.Е. Бойченко, 6.3 – А.А. Чироновым, 7.2 – А.В. Резниковым.

11 класс

11.1. Среди 18 человек 9 лжецов (они всегда лгут) и 9 рыцарей (они всегда говорят правду). Каждому из них дали конверт, причём ровно в 9 из них положили открытку. У людей спросили, есть ли у них в конверте открытка. Могло ли оказаться, что 9 из них ответили «да», а 9 ответили «нет»?

Ответ. Не может.

Решение. Пусть сначала ни у кого не было открытки, тогда мы получим 9 ответов «да» и 9 ответов «нет». Будем давать по очереди 9 людям открытки. При выдаче открытки любой человек (лжец или рыцарь) изменит свой ответ на противоположный. То есть произойдет 9 смен ответов. Но так как и после выдачи открыток оказалось 9 ответов «да» и 9 ответов «нет», то количество смен ответов должно быть чётным. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

11.2. Дана тройка последовательных неоднозначных простых чисел таких, что их среднее арифметическое – также простое число. Докажите, что эти числа образуют арифметическую прогрессию, разность которой делится на 6.

Решение. Среднее арифметическое трёх различных чисел больше наименьшего из них и меньше наибольшего из них. Значит, оно должно равняться среднему из чисел (они – три последовательных простых числа). Тогда эти числа образуют арифметическую прогрессию. Если разность этой прогрессии не делится на 3, то одно из чисел будет делиться на 3. Противоречие. Значит, разность прогрессии делится на 3. Она также делится на 2, так как все эти числа – нечётные.

Комментарий. Доказано, что числа образуют арифметическую прогрессию – 5 баллов.

11.3. Петя вырезал из картона 21 треугольник, у каждого из которых одна из сторон (будем называть её *основанием*) равна 2, а две другие (будем называть их *боковыми сторонами*) – целочисленные. Затем он сложил эти треугольники так, что их вершины совпали, а основания образовали 21-звенную пространственную замкнутую ломаную. Докажите, что если у одного из треугольников есть боковая сторона длины 25, то сумма периметров всех треугольников не меньше 872.

Решение. По неравенству треугольника имеем: если у треугольника стороны – целочисленные и одна из них равна 2, то разность между двумя другими сторонами не больше 1. Пусть А и Б – те треугольники, у которых боковая сторона равна 25. Тогда вторые боковые стороны треугольников А и Б не меньше 24. У треугольников В и Г, соседних с А и Б, вторые боковые стороны тогда не меньше 23. Двигаясь далее в разные стороны от треугольников А и Б, мы будем получать треугольники, у которых вторые боковые стороны не меньше $22, 21, \dots 15$. То есть суммарный периметр всех треугольников не меньше $2 \cdot (2 + 25 + 24) + 2 \cdot (2 + 24 + 23) + \dots + 2 \cdot (2 + 16 + 15) + (2 + 15 + 15)$ (цепочки сходятся на треугольнике со сторонами 2, 15, 15). Эта сумма равна 872.

Замечание. Такая конструкция из треугольников, для которой сумма периметров равна 872, существует. Но доказывать этот факт в задаче не требуется.

Комментарий. Доказано, что разность боковых сторон любого треугольника не больше 1 – 2 балла.

11.4. На тригонометрической окружности отметили вершины правильного 20-угольника, причём одна вершина попала в точку $(1;\ 0)$. Два игрока по очереди красят по одной вершине своим цветом. Дважды красить вершины нельзя. Игра заканчивается, когда покрашены все вершины. После чего первый игрок считает сумму S_1 – сумму модулей синусов углов, соответствующих точкам, покрашенным цветом первого игрока. Второй игрок считает сумму S_2 – сумму модулей косинусов углов, соответствующих точкам, покрашенным цветом второго игрока. Если $S_1 > S_2$, то выигрывает первый игрок. Иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: Второй.

Решение. Занумеруем вершины 20-угольника подряд по часовой стрелке. Пусть второй игрок разобьет вершины на пары следующим образом: $1-6,\ 2-7,\ 3-8,\ 4-9,\ 5-10,\ 11-16,\ 12-17,\ 13-18,\ 14-19,\ 15-20$. И если первый игрок покрасит своим цветом вершину из какой-то пары, то второй игрок должен покрасить своим цветом оставшуюся вершину этой пары. Заметим, что разность углов, соответствующих вершинам одной пары, равна 90°. Также заметим, что $|\sin\alpha| = |\cos(\alpha \pm 90°)|$. Поэтому после каждой пары ходов к суммам каждого из игроков добавляются одинаковые числа. Значит, в конце игры $S_1 = S_2$, и второй игрок выигрывает.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

11.5. Верно ли, что у уравнения $a^3 - b^3 = c^4$ есть решение в натуральных числах такое, что $c > 10^{2025}$?

Ответ. Верно.

Решение. Пусть $a = kb$. Тогда $a^3 - b^3 = b^3(k^3 - 1) = b^2(k^3 - 1) \cdot b$. Возьмем $b = k^3 - 1$. Тогда $a^3 - b^3 = b^2(k^3 - 1)(k^3 - 1) = \left(b(k^3 - 1)\right)^2 = (k^3 - 1)^4 = c^4$, то есть $c = b = k^3 - 1$, $a = kb = k(k^3 - 1)$. Взяв, например, $k = 10^{1000}$, мы получим решение, для которого $c > 10^{2025}$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.