ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2025-2026 учебный год

Ответы и решения

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное. Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части, – решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Авторы задач и составители – Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, А.Д. Терёшин.

Задача 5.3 была предложена Д.Н. Оскорбиным, 6.2 – С.Е. Бойченко, 6.3 – А.А. Чироновым, 7.2 – А.В. Резниковым.

10 класс

10.1. На доску выписывают последовательность цифр 121122111222111122221… Сколько единиц будет записано на позициях с 1 по 1001001 включительно, считая слева?

Ответ. 500501.

Решение. Заметим, что сначала идет группа из 2 цифр (1 цифра «1» и 1 цифра «2»), потом группа из 4 цифр (2 цифры «1» и 2 цифры «2») и т.д. А всего в n группах $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + \dots + n \cdot 2 = n(n+1)$ цифр, причём цифр «1» и «2» поровну. Так как $1001000 = 1000 \cdot 1001$, то на первых 1001000 местах стоит $1001000 : 2 = 500500$ единиц. И на 1001001 месте слева стоит цифра «1». Значит, на требуемых позициях всего будет записана 500501 единица.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

10.2. На городских соревнованиях по велосипедному спорту была придумана следующая схема проведения заездов: спортсмены вначале все едут одинаковое время – полчаса, а затем без остановки – дополнительное время, начисляемое по правилу: каждый получает в заезде дополнительное количество минут, равное расстоянию, которое он проехал за первые полчаса, измеренному в км. При подведении итогов выяснилось, что Василий за первые полчаса проехал на 6 км больше, чем Алексей, а по окончании заездов – на 9 км больше, чем Алексей. Найдите скорости езды Василия и Алексея, если эти скорости были постоянными.

Ответ. 9 км/ч и 21 км/ч.

Решение. Пусть S км – расстояние, которое проехал за полчаса Алексей, тогда Василий за это же время проехал $S + 6$ км. Пусть v км/ч – скорость Алексея, тогда $v + 12$ км/ч – скорость Василия (он проехал за полчаса на 6 км больше). Значит, Алексей суммарно ехал $\frac{S}{v} + \frac{v}{2 \cdot 60}$ ч, а Василий $\frac{S+6}{v+12} + \frac{v+12}{2 \cdot 60}$ ч. Умножая время движения на скорости v – Алексея и $v + 12$ – Василия, получаем $S + 6 + \frac{(v+12)^2}{2 \cdot 60} - \left(S + \frac{v^2}{2 \cdot 60}\right) = 9$, откуда $v = 9$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

10.3. При некотором значении параметра q уравнение $(x^2+14x+q)(x^2+14x+q+18)=0$ имеет четыре различных корня, и эти корни образуют арифметическую прогрессию. Каким может быть первый член этой прогрессии?

Ответ. – 11,5 или – 2,5.

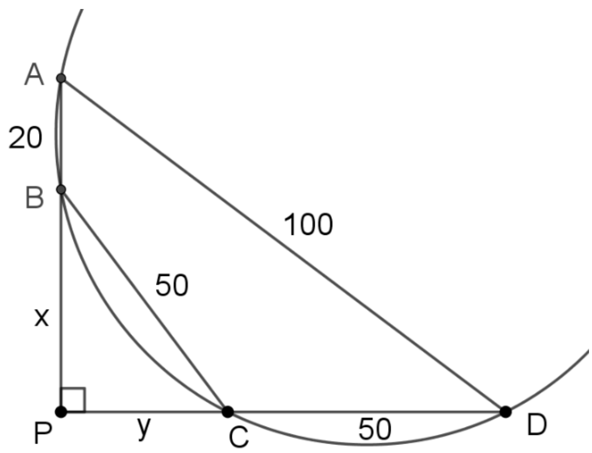
Решение. Пусть $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d$ – данные четыре корня, образующие арифметическую прогрессию. По теореме Виета сумма корней в каждом уравнении равна -14. Поэтому эти четыре корны должны быть разбиты на две пары с одинаковой суммой. Значит, одна пара – это a и $a+3d$, вторая – это $a+d$ и $a+2d$. По теореме Виета произведения корней уравнений равны q и $q+18$. Тогда разность этих произведений равна $(a+d)(a+2d)-a(a+3d)=2d^2$. Откуда $2d^2=(q+18)-q=18$ и $d=\pm 3$. Тогда из равенства $2a+3d=-14$ при $d=3$ получаем $a=-11{,}5$, а при $d=-3$ получаем $a=-2{,}5$.

Комментарий. Разобран только один случай разности d – 3 балла.

10.4. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $AB=20$, $BC=CD=50$ и $AD=100$. Известно, что сумма углов A и D этого четырёхугольника меньше $180°$. Чему может равняться эта сумма?

Ответ: $90°$.

Решение. Поскольку сумма углов BAD и ADC меньше $180°$, то лучи AB и DC пересекаются в некоторой точке P (см. рис.). Обозначим $PB=x$, $PC=y$. Поскольку $ABCD$ вписан, то треугольники PAD и PCB подобны, а раз $AD:BC=100:50=2$, получаем, что $2x=y+50$ и $2y=x+20$, откуда $x=40$ и $y=30$. Таким образом, стороны треугольника PBC равны $30,\ 40,\ 50$, значит, он прямоугольный, откуда и заключаем, что $\angle PAD+\angle PDA=90°$.



Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

10.5. Артём задумал действительные числа $a_1,\ a_2, \dots, a_{15}$. После чего он в некотором порядке выписал какие-то из произведений (возможно, все) $a_1a_2a_3$, $a_2a_3a_4, \dots, a_{13}a_{14}a_{15}$, $a_{14}a_{15}a_1$, $a_{15}a_1a_2$. Получился ряд из нечётных натуральных чисел $1, 3, 5, 7, \dots, 2k+1$. Какое наибольшее k могло у него получиться?

Ответ. $k = 12$.

Решение. Покажем сначала, что Артём мог так задумать числа, что получится выписать 13 произведений требуемым образом, то есть $k = 12$. Сначала он выберет какие-то числа a_1, a_2, a_3 так, чтобы $a_1a_2a_3 = 1$. Затем подберет число a_4 так, чтобы $a_2a_3a_4 = 3$ (т.е. $a_4 = \frac{3}{a_2a_3}$). И так далее до тех пор, пока он не подберет число a_{15} так, чтобы $a_{13}a_{14}a_{15} = 25$.

Докажем теперь, что невозможно подобрать числа так, чтобы получилось выписать 14 произведений. Рассмотрим три группы по пять произведений. В первую группу включим произведения $a_1a_2a_3$, $a_4a_5a_6$, $a_7a_8a_9$, $a_{10}a_{11}a_{12}$, $a_{13}a_{14}a_{15}$, во вторую – $a_2a_3a_4$, $a_5a_6a_7$, $a_8a_9a_{10}$, $a_{11}a_{12}a_{13}$, $a_{14}a_{15}a_1$, в третью – $a_3a_4a_5$, $a_6a_7a_8$, $a_9a_{10}a_{11}$, $a_{12}a_{13}a_{14}$, $a_{15}a_1a_2$. Произведение пяти чисел каждой группы равно $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{15}$. Если бы получилось выписать 14 произведений так, что они образовывали ряд $1, 3, 5, 7, \dots, 27$, то какие-то из этих чисел вошли бы в две группы (по пять произведений). Но из нечётных чисел от 1 до 27 нельзя выбрать 10 и разбить их на две группы по 5 с одинаковым произведением. Это следует из того, что среди этих чисел есть 5 простых: $11, 13, 17, 19$ и 23, на которые не делится ни одно из оставшихся нечётных чисел от 1 до 27. А хотя бы одно из этих простых чисел должно попасть в эти два произведения (так как всего 14 нечётных чисел от 1 до 27).

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Показано, как получить $k = 12$ – 2 балла.
Доказано, что $k < 13$ – 5 баллов.