ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2025-2026 учебный год

Ответы и решения

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное. Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части, – решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Авторы задач и составители – Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, А.Д. Терёшин.

Задача 5.3 была предложена Д.Н. Оскорбиным, 6.2 – С.Е. Бойченко, 6.3 – А.А. Чироновым, 7.2 – А.В. Резниковым.

9 класс

9.1. Среди 20 человек 10 лжецов (они всегда лгут) и 10 рыцарей (они всегда говорят правду). Некоторым из них дали монеты, причём каждому – не более 3 монет. После чего у каждого из людей спросили: «Сколько тебе дали монет?». Было получено 5 ответов «0», 5 ответов «1», 5 ответов «2» и 5 ответов «3». Какое наибольшее количество монет могли суммарно дать всем этим 20 людям?

Ответ. 55 монет.

Решение. Так как рыцари говорят правду, вместе могут получить не более $2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 25$ монет. А каждый из лжецов мог получить (по условию) не более 3 монет, то есть вместе лжецы могут получить не более 30 монет. Такая ситуация реализуется, если 5 рыцарям дали по 2 монеты (они дали ответ «2»), 5 рыцарям дали по 3 монеты (они дали ответ «3»), 10 лжецам дали по 3 монеты (они дали 5 ответов «0» и 5 ответов «1»). А всего вместе они получат 55 монет.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

9.2. Существуют ли 18 последовательных натуральных чисел таких, что и суммы цифр этих чисел образуют 18 последовательных натуральных чисел (не обязательно записанных по порядку)?

Ответ. Существуют.

Решение. Подойдут, например, числа от 90 до 107. У чисел от 90 до 99 будут суммы цифр от 9 до 18, а у чисел от 100 до 107 будут суммы цифр от 1 до 8.

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

9.3. При решении уравнения $(x^2-ax+c)(x^2-bx+c)=0$, где $a,\ b,\ c$ – некоторые натуральные числа, причём $a>b$, Катя обнаружила, что уравнение имеет четыре корня, и эти корни являются последовательными натуральными степенями тройки (например, $3^3,\ 3^4,\ 3^5,\ 3^6$). Найдите все простые числа, которые могут быть делителями числа $a-b$.

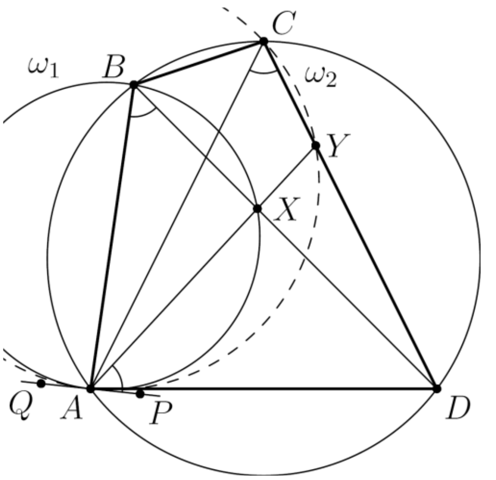
Ответ. 2 и 3.

Решение. Пусть $3^k,\ 3^{k+1},\ 3^{k+2},\ 3^{k+3}$ – данные корни (k – натуральное). По теореме Виета для данных квадратных уравнений произведения корней одинаковы (и равны c). Значит, корнями одного уравнения являются числа 3^k, 3^{k+3}, другого – числа3^{k+1}, 3^{k+2}. Сумма корней первого уравнения равна $a=3^k+3^{k+3}=28\cdot 3^k$, а для второго – равна $b=3^{k+1}+3^{k+2}=12\cdot 3^k$. Значит, $a-b=16\cdot 3^k=2^4\cdot 3^k$. Так как k – натуральное число, то делителями разности $a-b$ будут простые числа 2 и 3 (и никакие другие).

Комментарий. Доказано, как корни распределяются по квадратным уравнениям – 2 балла.
Ответ получен рассмотрением примера – 0 баллов.

9.4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Прямая, проходящая через точку A, пересекает отрезки BD и CD в точках X и Y соответственно. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABX и ACY, касаются.

Решение. Обозначим через ω_1 и ω_2 описанные окружности треугольников ABX и ACY соответственно. Проведём через точку A прямую PQ, касающуюся ω_1 (см. рис). Тогда угол PAX между касательной PQ и хордой AX равен вписанному углу ABX, то есть углу ABD. Но вписанные углы ABD и ACD, опирающиеся на дугу AD в описанной окружности четырехугольника $ABCD$, равны. Значит, угол между прямой PQ и хордой AY в окружности ω_2 равен углу ACD, то есть вписанному углу ACY, опирающемуся на эту хорду. Следовательно, прямая PQ касается и окружности ω_2. Указанные в условии окружности имеют общую касательную, значит, они касаются.



9.5. Можно ли выбрать числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ так, что произведения $a_1a_2a_3a_4$, $a_2a_3a_4a_5, \ldots, a_8a_9a_{10}a_1$, $a_9a_{10}a_1a_2$, $a_{10}a_1a_2a_3$, записанные в некотором порядке, образовывали последовательные натуральные числа $1, 2, 3, \ldots, 10$?

Ответ. Нельзя.

Решение. Рассмотрим 5 произведений $a_1a_2a_3a_4$, $a_3a_4a_5a_6$, $a_5a_6a_7a_8$, $a_7a_8a_9a_{10}$, $a_9a_{10}a_1a_2$. Если их перемножить, мы получим произведение, в котором каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ участвует дважды, то есть равно $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{10})^2$. Аналогично, оставшиеся 5 произведений при перемножении дадут $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{10})^2$. Это означает, что 10 произведений можно разбить на две группы по 5 с одинаковым произведением. Но числа от 1 до 10 нельзя разбить на две группы по 5 чисел с одинаковым произведением, так как, например, среди них есть простое число 7, а никакое другое из них на 7 не делится.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.