# ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

## 2025-2026 учебный год

## Ответы и решения

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное. Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

| Баллы | Правильность (ошибочность) решения |
|---|---|
| 7 | Полное верное решение. |
| 6–7 | Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5–6 | Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений. |
| 3–4 | В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части, – решение одной из частей. |
| 2–3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| 0–1 | Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения. |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Авторы задач и составители – Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, А.Д. Терёшин.

Задача 5.3 была предложена Д.Н. Оскорбиным, 6.2 – С.Е. Бойченко, 6.3 – А.А. Чироновым, 7.2 – А.В. Резниковым.

## 8 класс

**8.1.** Из цифр 0, 1, 2, …, 9 составили два пятизначных числа А и В (все цифры использованы, на 0 число начинаться не может). Может ли оказаться так, что число А делится на каждую цифру числа В, кроме 0, а число В делится на каждую цифру числа А?

**Ответ.** Может.

**Решение.** Например, подойдут числа А=49518, В=76320.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Любой правильный пример – 7 баллов.

**8.2.** Среди 18 человек 9 лжецов (они всегда лгут) и 9 рыцарей (они всегда говорят правду). Каждому из них дали конверт, причём ровно в 9 из них положили открытку. У людей спросили, есть ли у них в конверте открытка. Могло ли оказаться, что 9 из них ответили «да», а 9 ответили «нет»?

**Ответ.** Не может.

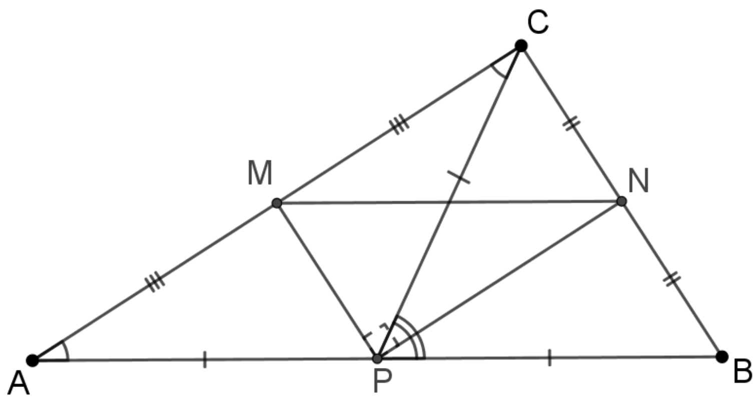
**Решение.** Пусть сначала ни у кого не было открытки, тогда мы получим 9 ответов «да» и 9 ответов «нет». Будем давать по очереди 9 людям открытки. При выдаче открытки любой человек (лжец или рыцарь) изменит свой ответ на противоположный. То есть произойдет 9 смен ответов. Но так как и после выдачи открыток оказалось 9 ответов «да» и 9 ответов «нет», то количество смен ответов должно быть чётным. Противоречие.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

**8.3.** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ выбрана точка $P$. Оказалось, что угол $APC$ в два раза больше угла $ABC$, угол $BPC$ в два раза больше угла $BAC$. Найдите $PC$, если $MN = 2$, где точка $M$ – середина стороны $AC$, а точка $N$ – середина стороны $BC$.

**Ответ.** 2.

**Решение.** Внешний угол $BPC$ треугольника $APC$ равен сумме углов $PAC$ и $PCA$. По условию, угол $BPC$ в два раза больше угла $PAC$, значит, углы $PAC$ и $PCA$ равны, и тогда $PA = PC$. Аналогично $PB = PC$. Следовательно, треугольники $APC$ и $BPC$ являются равнобедренными и в них медианы $PM$ и $PN$ являются и биссектрисами, и высотами, значит, углы $PMC,\ PNC$ – прямые. Угол $MPN$ – прямой как сумма половин двух смежных углов $APC$ и $BPC$. Тогда в четырёхугольнике $MPNC$ углы $MPN,\ PMC,\ PNC$ – прямые, откуда $MPNC$ - прямоугольник. Тогда $MN = PC = 2$ как диагонали прямоугольника.




**Комментарий.** Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказана равнобедренность одного из треугольников – 3 балла.

**8.4.** Олег утверждает, что какие бы 100 попарно различных натуральных чисел ему не дали, он может выложить их в ряд так, что среди сумм соседних чисел встретится не менее $N$ составных. Какое наибольшее значение может принимать $N$?

**Ответ.** 98.

**Решение.** Если все числа одной четности, то все суммы будут чётными числами (большими 2), а, значит, составными. Иначе, расставив сначала все чётные, а затем все нечётные числа, Олег гарантирует, что 98 из 99 сумм точно будут чётными числами.
Покажем, что 99 составных чисел можно получить не всегда. Пусть Олегу дали набор чисел $1, p_1 - 1, p_2 - 1, \ldots, p_{99} - 1$, где $p_1, p_2, \ldots, p_{99}$ – различные нечётные простые числа. Тогда как бы ни выкладывал числа Олег, число 1 вместе со своим соседом в сумме будет давать простое число.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что можно сделать 98 составных сумм – 4 балла.
Доказано, что 99 составных сумм можно сделать не всегда – 3 балла.

**8.5.** Можно ли выбрать числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ так, что произведения $a_1a_2a_3a_4$, $a_2a_3a_4a_5, \ldots, a_8a_9a_{10}a_1$, $a_9a_{10}a_1a_2$, $a_{10}a_1a_2a_3$, записанные в некотором порядке, образовывали последовательные натуральные числа $1, 2, 3, \ldots, 10$?

**Ответ.** Нельзя.

**Решение.** Рассмотрим 5 произведений $a_1a_2a_3a_4$, $a_3a_4a_5a_6$, $a_5a_6a_7a_8$, $a_7a_8a_9a_{10}$, $a_9a_{10}a_1a_2$. Если их перемножить, мы получим произведение, в котором каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ участвует дважды, то есть равно $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{10})^2$. Аналогично, оставшиеся 5 произведений при перемножении дадут $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{10})^2$. Это означает, что 10 произведений можно разбить на две группы по 5 с одинаковым произведением. Но числа от 1 до 10 нельзя разбить на две группы по 5 чисел с одинаковым произведением, так как, например, среди них есть простое число 7, а никакое другое из них на 7 не делится.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснования – 0 баллов.