ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2025-2026 учебный год

Ответы и решения

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное. Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части, – решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Авторы задач и составители – Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, А.Д. Терёшин.

Задача 5.3 была предложена Д.Н. Оскорбиным, 6.2 – С.Е. Бойченко, 6.3 – А.А. Чироновым, 7.2 – А.В. Резниковым.

7 класс

7.1. Найдите четыре целых числа таких, что их сумма равна нулю, а произведение равно 2025.

Ответ. Например, –1, –45, 45 и 1.

Решение. Заметим, что $2025 = 45^2$. Тогда, например, подойдут числа –1, –45, 45 и 1.

Замечание. Существуют и другие примеры. Любая четвёрка чисел вида $a;\ -a;\ \frac{45}{a};\ -\frac{45}{a}$, где a – делитель числа 45, подходит.

Комментарий. Любой правильный пример – 7 баллов.

7.2. В кошельке лежали 10 монет достоинством 1 и 2 рубля. Семь ребят разобрали все монеты, причём каждый взял либо одну монету, либо две. Если кто-то брал две монеты, то это были монеты разного достоинства. Известно, что у Пети в итоге оказалось меньше денег, чем у любого другого ребёнка. Какая сумма могла лежать в кошельке?

Ответ. 16 рублей.

Решение. Так как ребят 7, а монет 10, и каждый брал либо одну, либо две монеты, то трое ребят взяли по две монеты, а четверо по одной. Заметим, что любой взявший две монеты получил 3 рубля, что больше, чем у любого, взявшего одну монету. Значит, у Пети монета достоинством в 1 рубль, у остальных троих, взявших по одной монете – по 2 рубля. Значит, в кошельке было $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 16$ рублей.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 2 балла.

7.3. Среди 13 человек есть лжецы (они всегда лгут) и рыцари (они всегда говорят правду). Каждому из них дали несколько конфет, после чего каждый сказал: «У меня чётное число конфет». После этого некоторые люди дали часть своих конфет кому-то другому. Может ли оказаться, что теперь каждый может сказать: «У меня нечётное число конфет»?

Ответ. Не может.

Решение. Пусть такое возможно. Так как каждый изменил свой ответ, то количество конфет у него изменило чётность. Посчитаем общее количество конфет после передачи конфет. Оно изменилось на величину, равную сумме 13 нечётных слагаемых (слагаемое будет со знаком «плюс», если у человека увеличилось количество конфет, и со знаком «минус» – если уменьшилось). Эта величина – нечётное число. Но общее количество конфет не могло измениться. То есть оно изменилось на 0, а 0 – чётное число. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7.4. Прямоугольник разрезан на равные квадраты. Для каждого из квадратов посчитали количество квадратов разрезания, имеющих с данным квадратом общую сторону. Все посчитанные числа сложили и получили сумму, равную 208. Найдите количество квадратов разрезания, если известно, что по крайней мере один из них не имеет общих точек с границами прямоугольника.

Ответ. 60.

Решение. Пусть прямоугольник имеет размеры $m \times n$ ($m \geq n$, длину стороны квадрата разрезания считаем равной 1). Так как хотя бы один квадратов разрезания не имеет общих точек с границами прямоугольника, то каждое из чисел m и n хотя бы 3. У прямоугольника есть 4 угловые клетки, каждая из которых имеет две соседние клетки; кроме того есть $2(n-2)+2(m-2)$ неугловых клеток, расположенных на сторонах прямоугольника, у каждой из которых по 3 соседние клетки; а также $(n-2)(m-2)$ внутренние клетки, у каждой из которых по 4 соседние клетки. Общее количество соседних клеток равно $2 \cdot 4 + 3 \cdot (2n + 2m - 8) + 4 \cdot (mn - 2m - 2n + 4) = 4mn - 2m - 2n$. По условию это количество равно 208. Значит, $4mn - 2m - 2n = (2m-1)(2n-1) - 1 = 208$, то есть $(2m-1)(2n-1) = 209$. Но $209 = 19 \cdot 11$ – произведение двух простых чисел. Значит, $2m - 1 = 19$, $2n - 1 = 11$, откуда $m = 10$, $n = 6$. Отсюда количество квадратов разрезания равно 60.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7.5. Олег утверждает, что какие бы 100 попарно различных натуральных чисел ему не дали, он может выложить их в ряд так, что среди сумм соседних чисел встретится не менее N составных. Какое наибольшее значение может принимать N?

Ответ. 98.

Решение. Если все числа одной четности, то все суммы будут чётными числами (большими 2), а, значит, составными. Иначе, расставив сначала все чётные, а затем все нечётные числа, Олег гарантирует, что 98 из 99 сумм точно будут чётными числами.
Покажем, что 99 составных чисел можно получить не всегда. Пусть Олегу дали набор чисел $1, p_1 - 1, p_2 - 1, \ldots, p_{99} - 1$, где $p_1, p_2, \ldots, p_{99}$ – различные нечётные простые числа. Тогда как бы ни выкладывал числа Олег, число 1 вместе со своим соседом в сумме будет давать простое число.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что можно сделать 98 составных сумм – 4 балла.
Доказано, что 99 составных сумм можно сделать не всегда – 3 балла.