ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2025-2026 учебный год

Ответы и решения

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное. Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части, – решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

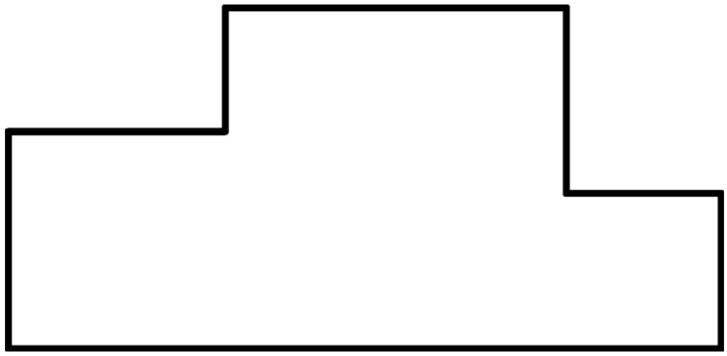
Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Авторы задач и составители – Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, А.Д. Терёшин.

Задача 5.3 была предложена Д.Н. Оскорбиным, 6.2 – С.Е. Бойченко, 6.3 – А.А. Чироновым, 7.2 – А.В. Резниковым.

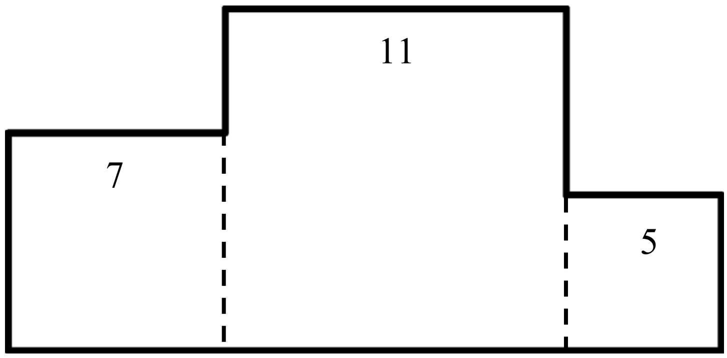
6 класс

6.1. Фигура «пьедестал» составлена из трёх квадратов с длинами сторон 5, 7 и 11 так, как показано на рисунке. Найдите периметр этой фигуры.



Ответ. 68.

Решение. Общий периметр трёх квадратов равен $7 \cdot 4 + 11 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 92$. Но отрезки, отмеченные на рисунке пунктиром, не участвуют в подсчёте периметра фигуры. Длина каждого из этих отрезков учитывается дважды в сумме периметров квадратов. Поэтому искомый периметр равен $92 - 7 \cdot 2 - 5 \cdot 2 = 68$.



Комментарий. Верный ответ без обоснования – 3 балла.

6.2. У Пети и Коли две одинаковые рабочие тетради, в которых есть рисунок окружности с отмеченными на ней N точками, делящими окружность на равные дуги. Две из этих точек на рисунке обозначены А и Б (одинаково в обеих тетрадях). Петя и Коля занумеровали точки каждый в своей рабочей тетради номерами от 1 до N. У них обоих нумерация идет по часовой стрелке, но начальные точки счёта различны. Найдите N, если известно, что у точки А пятый номер в счёте Пети и двенадцатый номер в счёте Коли, а у точки Б – наоборот: двенадцатый номер в счёте Пети и пятый номер в счёте Коли.

Ответ. $N = 14$.

Решение. Из условия следует, что вначале номера точек в счёте Коли – больше: П – 5, К – 12. Далее по кругу будет такой счёт: П – 6, К – 13, П – 7, К – 14 и так далее вплоть до завершения Колей полного круга, когда, дойдя до номера N, он начнет счёт с начала: 1, 2, …, то есть уменьшит свой счёт на N, и 12-ому номеру Пети вместо 19 ($12 + 7 = 19$) будет соответствовать номер $19 - N$, который оказался пятым. Значит, $N = 14$.

Замечание. Можно также посчитать, что между точками на обеих дугах должно располагаться по $12 - 5 - 1 = 6$ точек, значит, всего точек было $1 + 1 + 6 + 6 = 14$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Решение основано на правильных рисунках, иллюстрирующих соответствие номеров – баллы не снимаются.

6.3. Артём сопоставил каждой букве русского алфавита число, а каждому слову (возможно бессмысленному) сопоставил произведение чисел, соответствующих всем буквам этого слова. Например, если буквам М и А сопоставлены числа 3 и $\frac{1}{2}$, то слову МАМА будет сопоставлено число $\frac{9}{4}$. Могло ли так оказаться, что словам ОДИН, ДВА, ТРИ, …, ДВАДЦАТЬ сопоставлены числа 1, 2, 3, …, 20 соответственно?

Ответ. Не могло.

Решение. Заметим, например, что $\frac{\text{ОДИН}}{\text{ТРИ}} = \frac{\text{ОДИННАДЦАТЬ}}{\text{ТРИНАДЦАТЬ}}$, но $\frac{1}{3} \neq \frac{11}{13}$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

6.4. Найдите наибольшее 2025-значное число, у которого каждая цифра, кроме первой и последней, равна сумме двух соседних с ней цифр, умноженной на некоторое натуральное число или ноль (этот множитель не обязательно должен быть один и тот же при получении цифр искомого числа).

Ответ. 990990…990.

Решение. Из двух чисел с одинаковым числом цифр больше то, у которого в первом слева разряде, в котором числа различаются, цифра больше. Значит, искомое число Х должно начинаться с цифры 9. Вторую цифру тоже можно сделать равной 9. Для этого нужно, чтобы третья цифра числа Х равнялась 0, а множитель равнялся 1. Тогда $\mathrm{X} = 990\mathrm{АБВ}\ldots$. Цифра 0 в третьем слева разряде может быть получена как произведение суммы $(9 + \mathrm{А})$ на 0. Повторяя приведенные рассуждения для цифр Б, В, … , получаем тройки цифр 990. Число Х оканчивается на 990, поскольку 2025 делится на 3. И построение искомого числа получено.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 3 балла.
Объяснено, на какие числа умножаются суммы соседних цифр – ещё 2 балла.

6.5. Дана таблица 9×9. Назовем клетки таблицы *соседними*, если они имеют **общую сторону**. Можно ли расставить в клетки этой таблицы различные натуральные числа от 1 до 81 так, что сумма чисел, стоящих в любых двух соседних клетках, не делилась бы на 3?

Ответ. Можно.

Решение. Заметим, что сумма двух чисел делится на 3, если либо оба числа делятся на 3, либо одно из них имеет остаток 1 при делении на 3, а другое – остаток 2 при делении на 3.
Среди чисел от 1 до 81 ровно 27 делятся на 3 (имеют остаток 0 при делении на 3), ровно 27 имеют остаток 1 при делении на 3 и ровно 27 имеют остаток 2 при делении на 3.
Далее заменим числа на их остатки при делении на 3.
Тогда, например, можно расставить числа в таблице следующим образом. Рассмотрим шахматную раскраску доски (пусть угловые клетки чёрные). Мы будем ставить 0 только на чёрные клетки. В четвертую строку поставим числа 101010101, в пятую – 020202020. Тогда числа 1 и 2 из 4 и 5 строк не будут стоять рядом. После чего в строках 1, 2 и 3 расставим оставшиеся 22 числа 1 и 5 чисел 0 (на любые из чёрных клеток), а в строки 6, 7, 8, 9 оставшиеся 23 числа 2 и 13 чисел 0 (на любые из чёрных клеток). Тогда в таблице в соседних клетках будут стоять пары 1-1, 1-0, 2-0, 2-2. Например, это можно сделать так (примеры могут другими). Для удобства в таблице «0» выделены жирным шрифтом, а «1» курсивом:

16	*19*	*22*	*25*	*28*	*31*	*34*	*37*	*40*
43	*46*	*49*	*52*	*55*	*58*	*61*	*64*	*67*
30	*70*	**33**	*73*	**36**	*76*	**39**	*79*	**42**
1	**3**	*4*	**6**	*7*	**9**	*10*	**12**	*13*
15	2	**18**	5	**21**	8	**24**	11	**27**
14	**45**	17	**48**	20	**51**	23	**54**	26
57	29	**60**	32	**63**	35	**66**	38	**69**
41	**72**	44	**75**	47	**78**	50	**81**	53
56	59	62	65	68	71	74	77	80

Замечание. Существуют и другие примеры, существенно отличающиеся по конструкции.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Любой верный пример – 7 баллов.