Подмосковная Олимпиада Школьников по математике
2025-2026
5 класс
ДОВЫВОД

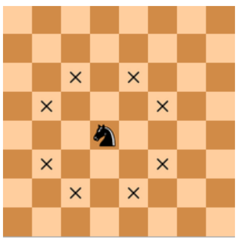
1. Юле выдали 10 карточек, на каждой из которых была написана одна из цифр от 0 до 9, причём цифры не повторялись. Она составила из этих карточек пять двузначных чисел, используя каждую карточку один раз. Юля заметила, что сумма двух полученных чисел равна сумме трех других. Могла ли Юля оказаться права? Ответ обоснуйте.
Ответ: верно, проверить пример, например: 90+36=84+15+27=126

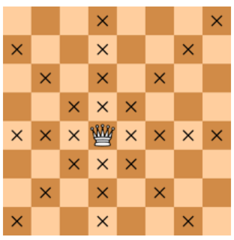
2. «*Вычислитель*» каждую секунду выполняет с числом такую операцию: каждую чётную цифру числа он делит на 2, а к каждой нечётной цифре прибавляет 1. «*Вычислитель*» получил на вход число 2025, какое число получится у «*вычислителя*», когда пройдёт ровно две минуты?
Ответ: 2022

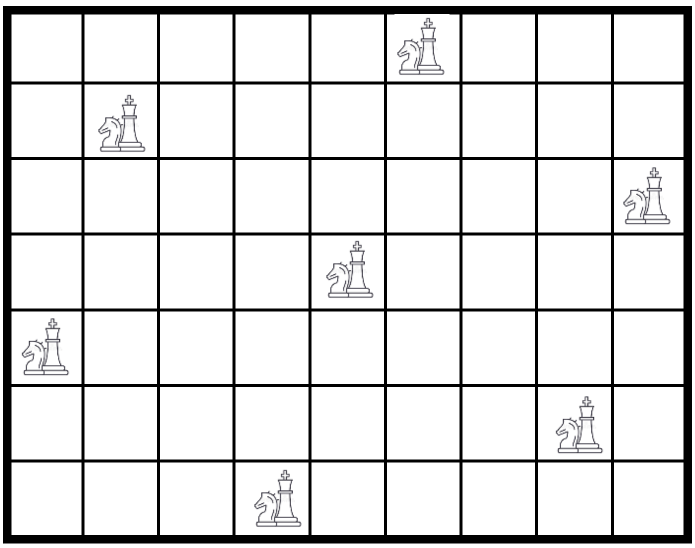
3. Аня нарисовала квадрат 8×8 и раскрасила его шахматной чёрно-белой раскраской. Пришёл вредный Миша и посадил зелёную кляксу на Анин рисунок. Аня очень расстроилась, но успела заметить, что испачканных белых клеток на 10 больше, чем неиспачканных. А всего испачкалось 35 клеток квадрата. Сколько чёрных клеток испачкала клякса Миши?
Ответ: 14

4. Задумали пятизначное число. Затем вычеркнули одну из его цифр и полученное четырёхзначное число сложили с исходным пятизначным числом. Получили число 67245. Чему могло быть равно задуманное число?
Ответ: 61132

5. *Ферзеконь* – фигура, которая может ходить и как конь, и как ферзь. Расставьте на доску 7×9 семь ферзеконей так, чтобы они не били друг друга. На рисунках показано, как ходят ферзь, и как конь.
Ответ: проверить пример, например:







5 класс

ВЫВОД

6. Найдите наименьшее шестизначное число, делящееся на 3, в котором все цифры различны и не делятся на 3.

Ответ: 124578

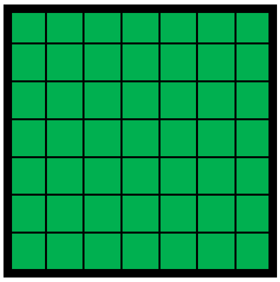
Решение: Заметим, что всего цифр, которые не делятся на 3, ровно 6 штук: 1, 2, 4, 5, 7, 8. Также заметим, что $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27$, то есть число, состоящее из любой перестановки этих цифр, будет делиться на 3. Значит, наименьшее такое число: 124578.

7. Космическая станция представляет собой куб $2 \times 2 \times 2$, а космические корабли имеют вид кубиков $1 \times 1 \times 1$. Корабли могут пристыковываться к станции по общей грани в виде квадратика 1×1. Какое максимальное число кораблей может пристыковаться к станции, если стыковку нельзя производить к *соседним по стороне* квадратикам (т.е. квадратикам, имеющим общую сторону)?

Ответ: 8.

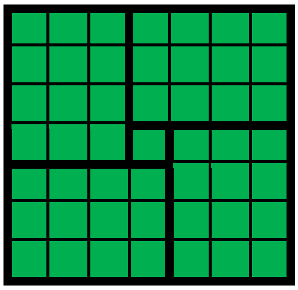
Решение. Оценка. К каждой из восьми вершин станции может прилегать не более одного квадратика стыковки с кораблем (т.к. три квадратика при вершине имеют попарно общую сторону). Поскольку каждый квадратик примыкает к какой-либо вершине, то стыковочных квадратов не более 8. Пример на 8: четыре грани 2×2, образующие «пояс», покрашены в шахматном порядке таким образом, чтобы к каждой вершине примыкала ровно одна покрашенная клетка.

8. Дан зелёный клетчатый квадрат 7×7, какое наименьшее число клеток нужно перекрасить в жёлтый цвет, чтобы из этого квадрата стало невозможно вырезать зелёный клетчатый прямоугольник площади 12.



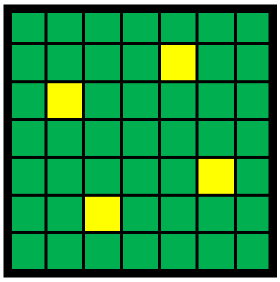
Ответ: 4

Решение: Оценка: разрежем исходный квадрат на четыре непересекающихся прямоугольника 3×4 и 1 клетку как показано на рисунке 1.



В каждом из этих прямоугольников должна быть перекрашена хотя бы одна клетка, поэтому всего перекрашенных клеток хотя бы 4.

Пример расстановки показан на рисунке 2:



9. У Оли было 12 красных и 12 синих фишек. Она положила их в ряд так, чтобы ни у одной из фишек (синей или красной) обе соседние фишки не были красными. Оля посчитала, что на пятом и двадцать втором местах в ряду лежат красные фишки. Сколько синих фишек могло лежать между ними?

Ответ: 8 или 9

Решение: в ряду всего 24 фишки. Фишки нельзя размещать в виде последовательностей вида ККК и КСК. Рассмотрим «края»: на местах с первого по четвёртое у нас может быть от 2 до 4 синих фишек, а на местах с 23-го по 24-ое 1 или 2 синие фишки, значит, всего «на краях» стоит не менее 3 синих фишек, тогда на местах с пятого по 22-ое стоит не более $12 - 3 = 9$ синих фишек. На восемнадцати позициях с 5-ой по 22-ую может стоять не более $(18 - 2): 2 + 2 = 10$ красных фишек. Мы знаем, что пятая и 22-ая позиции уже заняты красными фишками, значит, тогда на 16 позиций между ними мы можем поставить или 8 красных фишек и 8 синих, или 7 красных фишек и 9 синих. Других вариантов нет, т.к. на позициях с шестой по 21-ую может быть не более 8 красных и не более 9 синих фишек.

Примеры расстановки:

ККСС**К**КССККССККССККССК**К**СС

ККСС**К**КССККССККССККСССК**К**КС