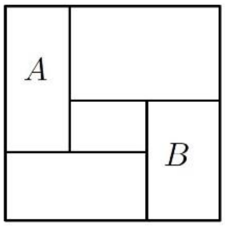
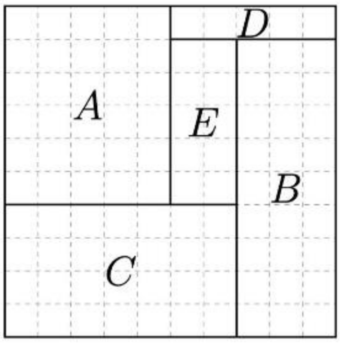
Подмосковная Олимпиада Школьников по математике
2025-2026
7 класс

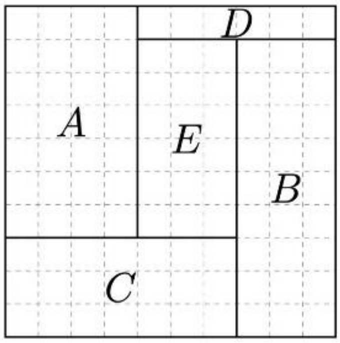
1. Разрежьте квадрат 10×10 по линиям сетки на 5 прямоугольников так, как изображено на схеме, чтобы у прямоугольника A площадь была строго больше площадей всех остальных частей, а у прямоугольника B периметр был строго больше периметров всех остальных частей.



Ответ: проверить пример, примеры могут быть другими.

Например: на первом рисунке площади прямоугольников A, B, C, D и E равны соответственно 30, 27, 28, 5 и 10, а периметры - 22, 24, 22, 12 и 14. На втором рисунке площади прямоугольников A, B, C, D и E равны соответственно 28, 27, 21, 6 и 18, а периметры - 22, 24, 20, 14 и 18.





2. Во время смены по математике во «Взлёте» при изучении темы «Правильные и неправильные дроби» на доске было записано несколько обыкновенных дробей, причём все числители и знаменатели у них были различны. Ученик Миша, пока никто не видел, переставил местами знаменатели этих дробей так, что все дроби изменились, но их сумма осталась прежней. Какое наименьшее количество дробей могло быть написано на доске?

Ответ: 3

Решение: Заметим, что если бы на доске была написана только одна дробь, то Миша не мог бы переставить знаменатели так, чтобы дробь изменилась. Если на доске были написаны две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, то после перестановки знаменателей получились бы дроби $\frac{a}{d}$ и $\frac{c}{b}$. По условию задачи их суммы должны были быть равны: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{c}{b}$. Следовательно, $0=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{a}{d}-\frac{c}{b}=\frac{ad+bc-ab-cd}{bd}=\frac{a(d-b)-c(d-b)}{bd}=\frac{(a-c)(d-b)}{bd}$. Тогда либо $a-c=0$, либо $d-b=0$. Поэтому либо числители, либо знаменатели данных дробей совпадают, что противоречит условию задачи. Следовательно, на доске было написано не менее трёх дробей. Приведём пример для трёх дробей (примеры могут быть другими – надо проверить). Исходные дроби: $\frac{5}{1}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}$, дроби после перестановки знаменателей: $\frac{5}{4}, \frac{3}{1}, \frac{9}{2}$. Тогда $\frac{5}{1}+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}=\frac{5}{4}+\frac{3}{1}+\frac{9}{2}=\frac{35}{4}$.

3. На следующей паре по математике Миша показал ребятам *магический квадрат* 3×3, в котором стояли цифры от 1 до 9, а все суммы по строкам и по столбцам были равны. Миша сказал, что может добавить к этому квадрату еще 3 строки снизу и 3 столбца справа, и вписать в свободные клетки числа от 10 до 36 так, что в итоге получится *магический квадрат* 6×6. Можно ли верить Мише?

Ответ: нет.

Решение: Допустим, что Миша прав. Пусть S_6 – «магическая сумма» по строкам и по столбцам для получившегося квадрата 6×6, а S_3– аналогичная сумма для квадрата 3×3 (*вообще-то* $S_6 = 666 : 6 = 111$, *а* $S_3 = 45 : 3 = 15$, *но для данного решения это несущественно*). Тогда в каждом из первых трёх столбцов в строках 4–6 стоят по три числа, дающие в сумме $S_6 - S_3$, поэтому общая сумма в левом нижнем квадрате 3×3 равна $3 \cdot (S_6 - S_3)$. Аналогично, в первых трёх строках в 4–6 столбцах стоят по три числа, дающие в сумме $S_6 - S_3$, поэтому общая сумма в правом верхнем квадрате 3×3 равна $3 \cdot (S_6 - S_3)$. Тогда в правом нижнем квадрате сумма всех девяти чисел должна быть равна $3S_6 - 3 \cdot (S_6 - S_3) = 3S_3 = 45$, а это возможно только для чисел от 1 до 9. Иначе говоря, эти числа в квадрате 6×6 должны были бы повториться. Противоречие. Значит, невозможно дополнить таким образом исходный *магический квадрат* до большего.

4. В десятиэтажном доме-башне план каждого этажа представляет собой квадрат 5×5, разделенный на квартиры, при этом каждая квартира - это прямоугольник $1 \times k$, состоящий из k клеток. Докажите, что найдутся две квартиры из одинакового числа клеток, расположенные на разных этажах, но занимающие одинаковое место на планах своих этажей (одна точно под другой).

Решение. Рассмотрим угловую комнату на плане этажа. Существует только 9 различных типов квартир, ее содержащих, а этажей 10, значит есть два этажа, реализующие два одинаковых варианта расположения квартиры, включающей эту угловую комнату.

5. Юля играет в точки. У нее есть три цветных фломастера: жёлтый, зелёный и красный. Она ставит точки на прямой, причем расстояние между соседними точками всегда равно 1 см. Юля экспериментировала, расставляя таким образом в разном порядке 3 жёлтые, 3 зелёные и 3 красные точки. Затем для каждой расстановки она считала расстояние между точками во всех парах одноцветных точек. Какое наибольшее количество различных значений у нее могло получиться?

Ответ: 7

Решение: Оценка. При такой расстановке точек расстояние может принимать натуральные значения от 1 до 8. Значит, могло получиться не более 8 различных чисел. Пусть у Юли получилось реализовать все 8 различных чисел, тогда были расстояния 7 и 8, а значит, две точки с одной стороны и одна с другой должны были быть одного цвета. Но тогда оставшиеся точки были двух других цветов, причем расстояние между ними не превышало 5. Значит, получить расстояние 6 в этой расстановке Юля уже не могла. Противоречие. Значит, у Юли могло получиться не более 7 различных чисел. Пример для 7 значений (проверить пример, примеры могут быть другими): расстояния между зелёными точками равны 3, 4, 7, расстояния между жёлтыми точками равны 4, 1, 5, расстояния между красными точками равны 2, 4, 6. Получилось реализовать расстояния 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7