Региональный этап. День 2

Условия, решения и схема оценивания. 10 класс

Содержание

10.6. Пятерка

В.Б. Игнатьев

Зенитное расстояние звезды в течение суток изменяется в 5 раз. Определите широту места наблюдения, если северное полярное расстояние звезды больше её склонения тоже в 5 раз.

Решение.

На **первом этапе** решения проинтерпретируем последнее утверждение. Северное полярное расстояние p – это угловое расстояние от северного полюса мира до светила, а склонение δ – это угловое расстояние от светила до небесного экватора. Сумма $p + \delta = 90°$.

Отсюда получаем, что склонение звезды равно

$$\delta = \frac{1}{6}90° = 15°.$$

При этом звезда относится к северному полушарию неба. Для южной полусферы решений нет.

На **втором этапе** запишем высоты, а потом и зенитные расстояния нижней и верхней кульминаций:

$$h_\uparrow = 90° - |\varphi - \delta| \qquad z_\uparrow = |\varphi - \delta|$$
$$h_\downarrow = \varphi + \delta - 90° \qquad z_\downarrow = 180° - \varphi - \delta$$

Последнюю формулу лучше записать в общем виде:

$$h_\downarrow = |\varphi + \delta| - 90° \qquad z_\downarrow = 180° - |\varphi + \delta|$$

Зенитное расстояние верхней кульминации меньше, чем зенитное расстояние нижней кульминации. При этом в кульминациях достигаются минимальное и максимальное значения зенитного расстояния.

Тогда из условия задачи

$$z_\downarrow = 5z_\uparrow$$

Подставим в это выражения формулы для зенитных расстояний:

$$5|\varphi - \delta| = 180° - |\varphi + \delta|$$

Нам уже известно, что склонение звезды $\delta = 15°$.

При раскрытии модулей, нужно рассмотреть три интервала:

A. $\varphi > \delta$ и $\varphi + \delta > 0°$. Упростим и получим, что $\varphi > 15°$.

B. $\varphi < \delta$ и $\varphi + \delta > 0°$. На этом интервале $\varphi \in (-15°; 15°)$

C. $\varphi < \delta$ и $\varphi + \delta < 0°$. Следовательно, $\varphi < -15°$

Случаи, когда $\varphi = 15^\circ$, нам неинтересны, поскольку в этом случае зенитное расстояние становится равным нулю, и задача вырождается.

Рассмотрим первый случай. Расскрываем модуль со знаком «плюс», здесь $\varphi > \delta$:

$$5\varphi - 75^\circ = 180^\circ - \varphi - 15^\circ,$$

$$\varphi_1 = \frac{240}{6} = 40^\circ.$$

Для второго случая, когда раскрываем модуль с «минусом», то есть верхняя кульминация происходит к северу от зенита ($\varphi < \delta$):

$$75^\circ - 5\varphi = 180^\circ - \varphi - 15^\circ,$$

$$-4\varphi_2 = 90^\circ \qquad \varphi_2 = -22.5^\circ.$$

Этот ответ не подходит, поскольку он не принадлежит интервалу $\varphi \in (-15^\circ; 15^\circ)$ и не удовлетворяет условию $\varphi < \delta$.

Рассмотрим третий вариант, раскрыв оба модуля с «минусами»:

$$5\delta - 5\varphi = 180^\circ + \delta + \varphi,$$

$$-6\varphi = 180^\circ - 4\delta,$$

$$\varphi_3 = \frac{120}{-6} = -20^\circ.$$

Этот ответ подходит, так как $\varphi < -15^\circ$

Ответ. $\varphi_1 = 40^\circ$, $\varphi_3 = -20^\circ$

Также опишем **альтернативный вариант решения.** Первая часть решения, где определяется склонение звезды $\delta = 15^\circ$, аналогична описанному выше варианту. Далее рассмотрим случай наблюдателя на северном полюсе. Для него звезда всегда находится на постоянной высоте и на постоянном зенитном расстоянии. Это зенитное расстояние равно северному полярному расстоянию p.

Теперь представим, что наблюдатель постепенно перемещается с северного полюса на юг, уменьшая свою широту. Тогда при текущей широте φ зенитное расстояние полюса мира станет равным $\alpha = 90^\circ - \varphi$. При этом зенитное расстояние для нижней кульминации будет увеличиваться:

$$z_\downarrow = p + \alpha,$$

а зенитное расстояние для верхней кульминации будет уменьшаться:

$$z_\uparrow = p - \alpha.$$

Рассмотрим функцию k, равную отношению зенитных расстояний нижней и верхней кульминации.

$$k = \frac{z_\downarrow}{z_\uparrow} = \frac{p + \alpha}{p - \alpha}$$

При $\alpha = 0$ отношение равно единице, при дальнейшем увеличении α функция k растет до момента, когда верхняя кульминация окажется в зените ($\alpha = p$). В этой точке функция k не определена, так как знаменатель равен 0. Функция растет монотонно, и решение уравнения $k = 5$ даст только один ответ. Определим его:

$$k = \frac{p+\alpha}{p-\alpha} = 5 \qquad \rightarrow \qquad \alpha = 50^\circ \qquad \rightarrow \qquad \varphi = 40^\circ.$$

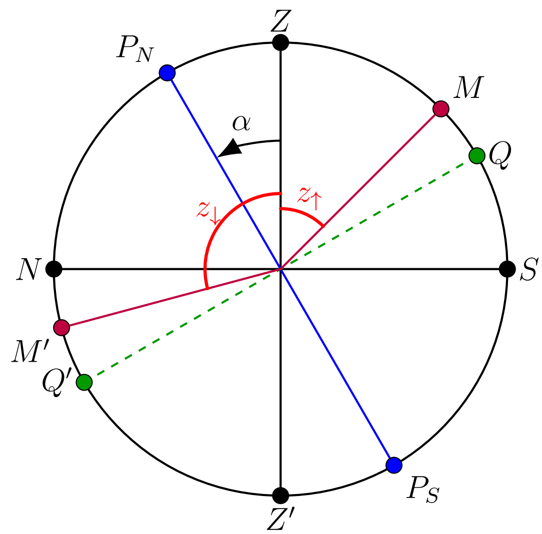


Рис. 1: Графическое решение для первого интервала. QQ' – небесный экватор, M – верхняя кульминация, M' – нижняя кульминация.

Рассмотрим второй интервал, в котором α увеличивается от 75° до 105°. Первая граница соответствует верхней кульминации в зените, а вторая граница соответствует нижней кульминации в надире. В этом интервале с увеличением α оба зенитных расстояния увеличиваются. Функция

$$k = \frac{\alpha+p}{\alpha-p}$$

будет монотонно падать от бесконечности на первой границе до $k = 6$. Решения нашей задачи на этом интервале нет.

Рассмотрим третий интервал, где $\alpha \in (105^\circ; 180^\circ)$.

В этом случае

$$z_\downarrow = (180^\circ - \alpha) + 90^\circ + (90^\circ - p) = 360^\circ - p - \alpha.$$

Тогда исследуемое отношение равно

$$k = \frac{z_\downarrow}{z_\uparrow} = \frac{360^\circ - p - \alpha}{\alpha - p} = 5.$$

k – монотонно падающая функция, изменяющаяся от 6 до 1. Решим уравнение:

$$360^\circ - p - \alpha = 5\alpha - 5p$$

$$360^\circ + 4p = 6\alpha \qquad \rightarrow \qquad \alpha = 110^\circ \qquad \rightarrow \qquad \varphi = -20^\circ.$$

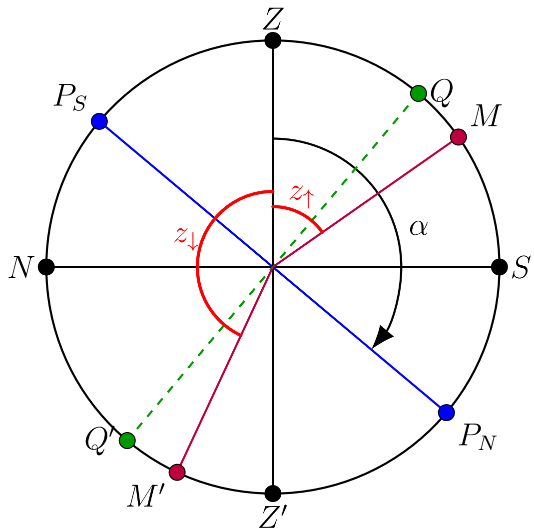


Рис. 2: Графическое решение для третьего интервала. QQ' – небесный экватор, M – верхняя кульминация, M' – нижняя кульминация.

Критерии оценивания. **16**

К1. Определение склонения звезды $\delta = +15°$ **4**

Если в ответе есть несколько вариантов склонения, или получены другие значения, за данный пункт ставится 0 баллов.

К2. Сформулирована система уравнений для решения задачи **4**

Если система уравнений записана верно только для одного из случаев (не содержит модули), оценка за данный критерий – 2 балла.

К3. Рассмотрены три случая, получены два ответа **5**

Найдено решение $\varphi_1 = 40°$ 2

Найдено решение $\varphi_3 = -20°$ 2

Получены и отброшены невозможные решения, например, $\varphi_2 = -22.5°$ 1

Решение может быть графическим (построением небесной сферы) или алгебраическим

К4. Сформулирован верный ответ **3**

Вариант решения с ответом $\varphi = \pm 40°$ оценивается максимум как 4+2+2+0=8 баллов

10.7. Родная Галактика

В. Б. Игнатьев

Далекие инопланетные астрономы наблюдают нашу галактику Млечный путь ($M = -21^m$, $R = 16$ кпк) в виде эллипса, у которого малая полуось в два раза меньше, чем большая полуось. Чему будет равна поверхностная звездная величина $m_{\square''}$ (звездная величина на квадратную секунду) наблюдаемой ими галактики? Поглощением света пренебречь.

Решение.

Запишем взаимосвязь между абсолютной и видимой звездной величиной:

$$M - m = 5 - 5\lg r.$$

Также запишем связь между поверхностной звездной величиной и интегральной (полной) видимой звездной величиной.

$$m_{\square''} = m + 2.5\lg S$$

Здесь S – это видимая угловая площадь Галактики $S = \pi ab$, где a и b – угловые размеры большой и малой полуосей Галактики, выраженные в угловых секундах. По условию b в два раза меньше, чем a, поэтому

$$S = \frac{\pi}{2}a^2.$$

Соберем все в одно выражение:

$$m_{\square''} = M - 5 + 5\lg r + 2.5\lg(\frac{\pi}{2}a''^2)$$

Последнее слагаемое можно упростить, воспользовавшись свойствами логарифмов. Также применим формулу углового размера

$$a'' = \frac{206265 R_G}{r},$$

где R_G и r будем выражать в парсеках. В итоге получаем:

$$m_{\square''} = M - 5 + 5\lg r + 2.5\lg(\frac{\pi}{2}) + 5\lg a''$$

$$m_{\square''} = M - 5 + 5\lg r + 2.5\lg(\frac{\pi}{2}) + 5\lg(\frac{206265 R_G}{r}).$$

Последнее слагаемое снова представим в виде разности логарифмов:

$$m_{\square''} = M - 5 + 5\lg r + 2.5\lg(\frac{\pi}{2}) + 5\lg(206265 R_G) - 5\lg r =$$

$$= M - 5 + 2.5\lg(\frac{\pi}{2}) + 5\lg(206265 R_G) = M - 5 + 5\lg(206265 R_G\sqrt{\frac{\pi}{2}})$$

Как и ожидалось, поверхностная звездная величина не зависит от расстояния между наблюдателем и объектом.

Подставим значения для получения численного ответа:

$$m_{\square''} = -21^m - 5 + 5\lg(206265 \cdot 16000 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}) = 22.1^m.$$

Критерии оценивания. **16**

К1. Запись связи между видимой и абсолютной звездными величинами **2**

К2. Запись связи между видимой интегральной и поверхностной звездными величинами . **3**

Формула может быть как выведена из закона Погсона, так и записана напрямую без вывода, оба варианта при верной записи оцениваются в полной мере.

К3. Выражение для угловой площади эллипса через большую полуось **2**

В случае, если Галактика рассматривается в виде прямоугольника со сторонами a и b, за критерии к3 и к6 ставится по 0 баллов.

К4. Выражение углового размера через линейный размер и расстояние до объекта **2**

Если в формуле или численных расчетах перепутаны радиус и диаметр, за критерии к4 и к6 ставится 0 баллов. Также баллы за этот пункт не ставятся, если формула записана, но не использована в решении.

К5. Исключение расстояния из формулы поверхностной яркости **4**

Доказана независимость поверхностной звездной величины от расстояния. В случае, если в финальной формуле есть расстояние, критерии к5 и к6 оцениваются в 0 баллов.

К6. Верный численный ответ **3**

Данный критерий выставляется только при наличии верного численного ответа с точностью $\pm 0.5^m$

10.8. Игра в прятки

В. Б. Игнатьев

Два раза за 12 лет в системе галилеевских спутников Юпитера появляется возможность затмения одного спутника другим. Определите максимально возможное изменение блеска Каллисто из-за этого эффекта. Воспользуйтесь приближением геометрической оптики.

Влиянием атмосфер спутников можно пренебречь. Считайте, что отражательная способность не зависит от угла падения. Из-за большого удаления Юпитера от Солнца фазы планеты и спутников можно считать равными 1. Орбиты Земли, Юпитера и всех спутников считайте круговыми. Экваториальный радиус Юпитера равен 71.5 тыс. км.

Спутник	Полуось орбиты	Диаметр спутника
Ио	421 800 км	3 640 км
Европа	671 100 км	3 120 км
Ганимед	1 070 400 км	5 270 км
Каллисто	1 882 700 км	4 820 км

Решение.

Данное явление возможно два раза за звездный (сидерический) период Юпитера, когда направление «Солнце – Юпитер» совпадает с плоскостью экватора и плоскостью орбит галилеевских спутников. Возникает ситуация, в чем-то аналогичная земному равноденствию.

Отсюда сразу можно получить величину радиуса орбиты Юпитера, которая непосредственно не дана в условиях.

$$a_{♃} = 12^{2/3} = 5.2 \text{ а.е.}$$

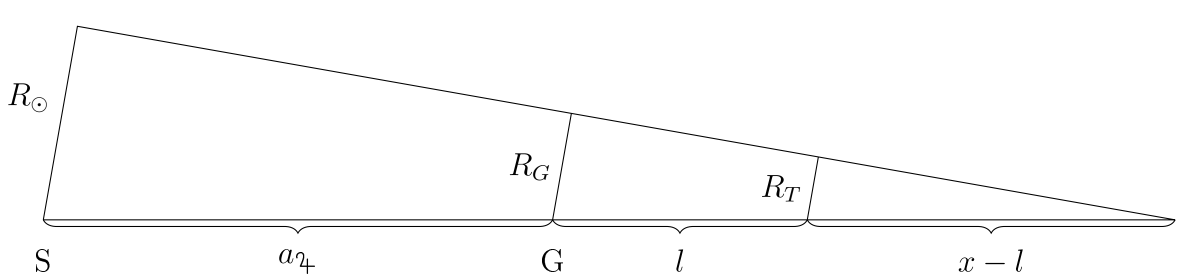
Калисто – самый далекий от Юпитера из всех галилеевских спутников. Для максимизации эффекта нам нужно найти условие, при котором размер тени на поверхности Каллисто от другого спутника максимален. Для этого нам нужен

A. самый большой по размеру спутник,

B. спутник, максимально близко расположенный к Каллисто.

Тут отлично подойдет Ганимед, так как он обладает наибольшим размером, и при этом он может быть ближе всех к Каллисто. Кроме этого, нам нужно учесть, что расположение объектов на одной линии в порядке «Солнце – Земля – Юпитер – Ганимед – Каллисто» в рамках задачи невозможно, так как в этом случае за Юпитером мы не увидим его спутники, а в условии задачи не сказано, что размерами Юпитера можно пренебречь.

1 этап. Определим радиус тени Ганимеда на удалении l:



.

Расстояние между Солнцем и Ганимедом с большой точностью равно радиусу орбиты Юпитера. Обозначим за величину x длину конуса тени от спутника, а за l – расстояние между спутниками.

$$\frac{R_\odot}{a_♃ + x} = \frac{R_G}{x}$$

Отсюда

$$x = a_♃ \frac{R_G}{R_\odot - R_G}$$

Также мы можем записать выражение для радиуса тени R_T:

$$\frac{R_T}{x - l} = \frac{R_G}{x}$$

$$R_T = R_G \frac{x - l}{x}$$

2 этап. Определение расстояния между спутниками.

Важно отметить, что нам нужно, чтобы Каллисто оказался в тени Ганимеда, но при этом не попал в тень Юпитера, и при этом нас интересует ситуация минимального расстояния между спутниками. Поэтому линия «Солнце – Ганимед – Каллисто» должна касаться границы Юпитера. Действительно, в этом случае расстояние между двумя спутниками будет минимально, а следовательно, размер тени будет максимальным.

Обозначим точкой O центр Юпитера, точкой K – Каллисто, точкой G – Ганимед. Линия KO' – касательная к поверхности Юпитера с Каллисто, при этом Ганимед также находится на этой касательной.

Заметим, что треугольники $OO'K$ и $OO'G$ – прямоугольные из-за соответствующего свойства касательной.

$$O'K = \sqrt{a_k^2 - R_♃^2}$$

$$O'G = \sqrt{a_G^2 - R_♃^2}$$

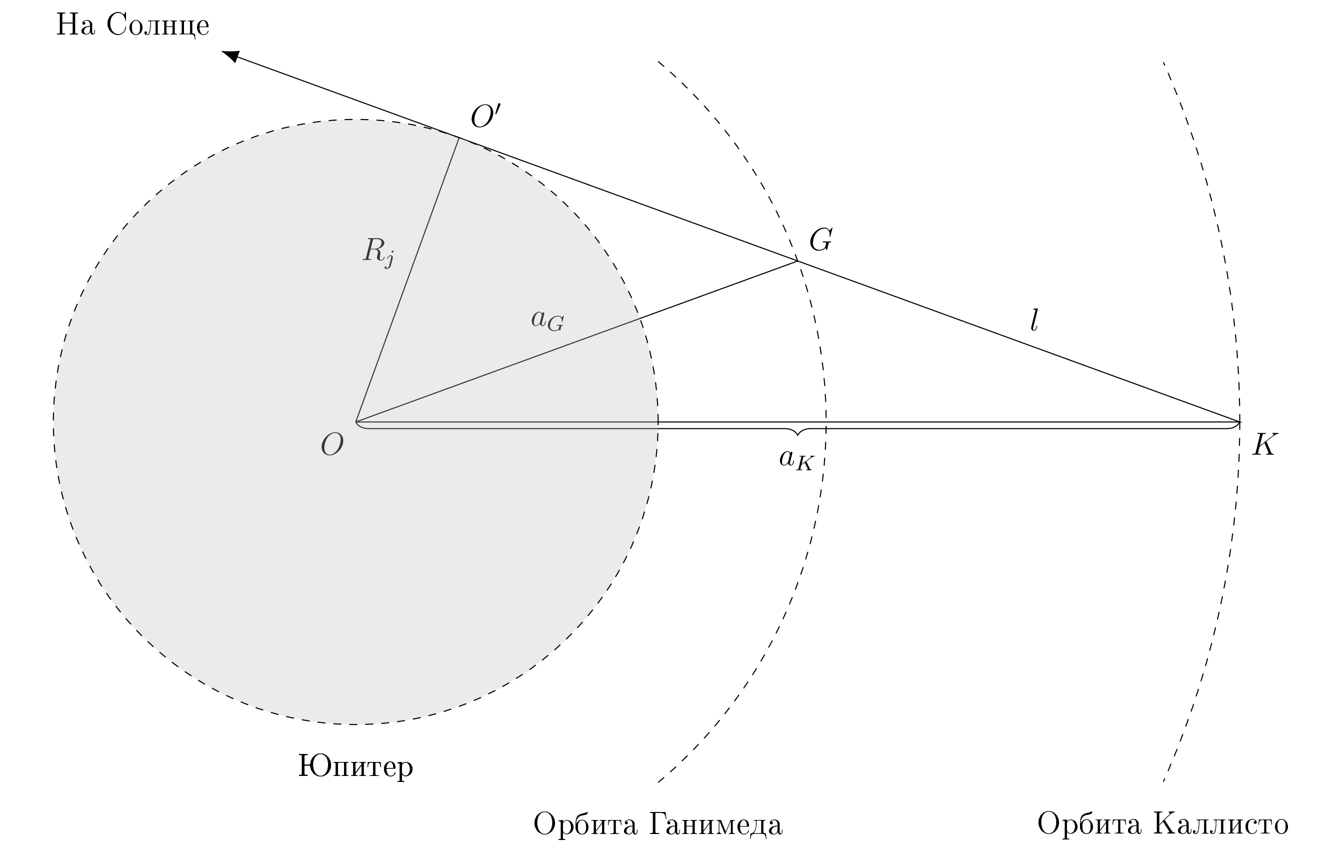
Разность между этими двумя расстояниями равна l:

$$l = \sqrt{a_k^2 - R_♃^2} - \sqrt{a_G^2 - R_♃^2}$$

Этап 3. Определим численные значения расстояния и радиуса тени.

$$l = \sqrt{1882700^2 - 71500^2} - \sqrt{1070400^2 - 71500^2} = 831\,300 \text{ км}$$

Полученная величина всего на тысячу километров больше, чем разница полуосей орбит Каллисто и Ганимеда.



Длина конуса тени

$$x = a_{♃}\frac{R_G}{R_\odot - R_G} = 5.2\cdot 1.5\cdot 10^8\ \text{км}\frac{2635\ \text{км}}{700000-2635} = 2\,947\,200\ \text{км}$$

$$R_T = 2635\ \text{км}\frac{2\,947\,200 - 831\,300}{2\,947\,200} = 1\,910\ \text{км}$$ [1]

Этап 4. Теперь рассчитаем фотометрию ситуации.

$$\Delta m = m - m_0 = -2.5\lg\frac{E_{\text{затм}}}{E_0}$$

Здесь E_0 – освещенность от Каллисто без затмения, $E_{\text{затм}}$ – освещенность от Каллисто, когда часть его диска закрыта Ганимедом. m_0 – видимая звездная величина Каллисто вне затмения, m – видимая звездная величина в момент затмения.

Во время затмения не вся поверхность Каллисто отражает свет. Поэтому освещенность от спутника будет меньше на величину

$$E_{\text{затм}} = E_0\frac{S - S_T}{S}$$

[1] стоит отметить, что и в модели «прозрачного Юпитера» ответ численно будет такой же, но сама модель астрономически не корректна.

Выразим площадь тени через радиусы:

$$\Delta m = -2.5\lg(1 - \frac{R_{\text{T}}^2}{R_c^2})$$

Теперь осталось только подставить значения:

$$\Delta m = -2.5\lg(1 - \frac{1908^2}{2410^2}) = -2.5\lg(0.373) = 1.07^m$$

Ответ: $\Delta m = 1.07^m$

Критерии оценивания. **16**

К1. Определение радиуса орбиты Юпитера **1**

К2. Четкое обоснование выбора Ганимеда как тела, создающего максимальную тень **2**

К3. Определение расстояния от Ганимеда до Каллисто **4**

Решение с моделью, в которой Ганимед, Каллисто, Юпитер и Солнце находятся на одной линии в указанном порядке (спутники не видны с Земли), оценивается по этому критерию в 1 балл. В остальных критериях оценка за эту модель не снижается.

К4. Определение размера тени Ганимеда на Каллисто **4**

К5. Определение падения блеска Каллисто **5**

Получение формулы для Δm через отношение радиусов 2

Получение верного численного ответа для величины падения блеска 3

Если участник рассматривает не Ганимед, а другой из спутников, то максимальная оценка при верных расчётах может составлять $1 + 0 + 2 + 2 + 1 = 8$ баллов.

10.9. Половина эклиптики

В. Б. Игнатьев

Астрономы проводили наблюдения за звездой, находящейся на эклиптике. В моменты кульминации звезды была измерена её лучевая скорость. Результаты наблюдений с разницей в полгода приведены в таблице.

Дата	Лучевая скорость
21.03	−35 км/с
23.09	5 км/с

Во время обоих сеансов наблюдений экваториальные координаты звезды были одинаковыми. Считая орбиту Земли круговой, определите:

A. Эклиптические координаты звезды

B. Полную гелиоцентрическую скорость звезды

Решение.

Обратим внимание, что лучевая скорость звезды изменяется. Причина этого изменения – это движение Земли вокруг Солнца с изменяющейся по направлению скоростью. Можно записать выражения:

$$\begin{cases} v_{r,1} = V_r - V_{\oplus,1} \\ v_{r,2} = V_r - V_{\oplus,2} \end{cases}$$

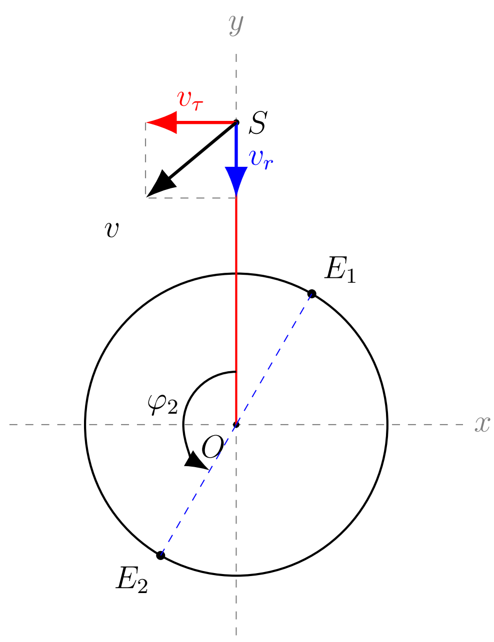


Рис. 3: Схема задачи. Положение Земли относительно Солнца и звезды.

Так как разница между наблюдениями составляет строго половину года, а орбиту Земли мы считаем круговой, вклад скорости Земли в лучевую скорость звезды в этих точках одинаков

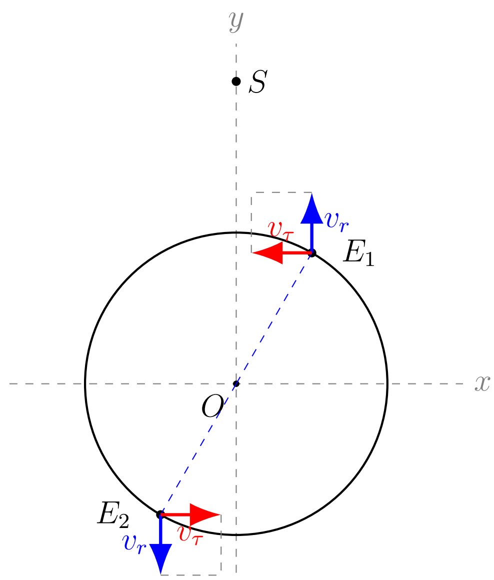


Рис. 4: Схема задачи. Компоненты скорости Земли относительно направления на звезду (наверх). Синим обозначена лучевая компонента v_r, красным – трансверсальная компонента v_τ

по модулю, но противоположен по знаку. Следовательно, сложив оба уравнения, мы получим удвоенное значение гелиоцентрической лучевой скорости звезды:

$$V_r = \frac{1}{2}(v_{r,1} + v_{r,2}) = -15 \text{ км/с}$$

А вычитая из первого уравнение второе, получаем проекцию скорости Земли на направление «Земля – звезда»:

$$V_{\oplus,1} = \frac{1}{2}(v_{r,1} - v_{r,2}) = -20 \text{ км/с}$$

Нарисуем картинку в плоскости эклиптики, обозначим на ней орбиту Земли и направление на звезду. Обозначим положения Земли в моменты первого и второго наблюдения. Введем угол φ, который будем отсчитывать от направления на звезду против часовой стрелки. Вычислим этот угол:

$$V_{\oplus,1} = V_\oplus \sin\varphi = -20 \text{ км/с} \qquad \to \qquad \sin\varphi = -\frac{20}{29.7}$$

$$\varphi = -42.3^\circ.$$

Теперь мы можем определить эклиптические координаты звезды. После момента второго наблюдения, чтобы координаты Солнца совпали с координатами звезды, Земле нужно сместиться на угол φ.

Получаем, что эклиптическая широта звезды равна $b = 0^\circ$, так как звезда находится на эклиптике. А эклиптическую долготу можно определить из рисунка:

$$l_1 = 180^\circ + 42.3^\circ = 222.3^\circ$$

Но возможен, случай, в котором Земля может находится в точках E_3 и E_4. В этом случае,

$$l_2 = 360^\circ - 42.3^\circ = 317.7^\circ$$

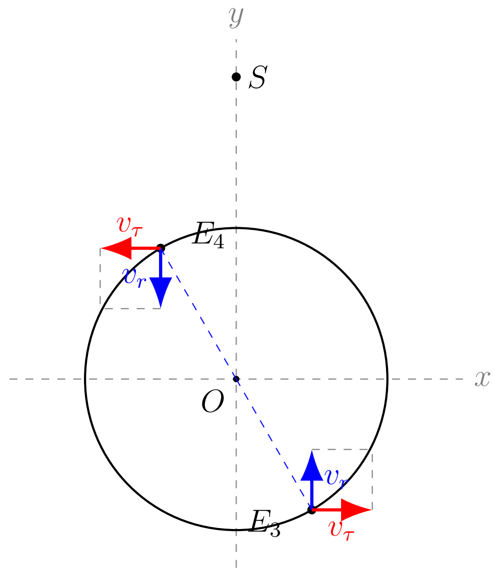


Рис. 5: Второй случай расположения Земли на орбите. E_3 – Земля в момент весеннего равноденствия.

Таким образом, ответ на первый вопрос задачи – $b = 0^\circ$, $l = 222.3^\circ$ или 313.7°.

Перейдем ко **второму вопросу** задачи. Между наблюдениями прошло полгода, звезда переместилась в пространстве на величину $\mu/2$, которая, впрочем, нам неизвестна. Но при этом из-за движения Земли вокруг Солнца возникло параллактическое смещение звезды на величину $2\pi \sin\varphi$ (π – параллакс звезды). Множитель 2 возникает, поскольку параллактическое смещение в 2 раза больше, чем величина параллакса, а множитель $\sin\varphi$ появляется из-за уменьшения базы для расчета параллакса.

Так как суммарное изменение координат звезды по условию равно нулю, получим:

$$\frac{\mu}{2} = 2\pi \sin\varphi$$

Выразим отсюда μ:

$$\mu = 4\pi \sin\varphi$$

Теперь определим трансверсальную компоненту скорости звезды:

$$v_\tau = 4.74\frac{\mu}{\pi} = 4.74 \cdot 4\sin\varphi = 12.8 \text{ км/с}$$

Тогда полная скорость звезды будет равна

$$V = \sqrt{v_r^2 + v_\tau^2} = \sqrt{15^2 + 12.8^2} = 19.7 \text{ км/с}$$

Ответ: $b = 0^\circ$, $l_1 = 222.3^\circ$ или $l_2 = 313.7^\circ$, $v = 19.7$ км/с.

Рассмотрим **вариант решения**, в котором участник учитывал все возможные эффекты – аберрацию, прецессию, собственное движение и параллакс.

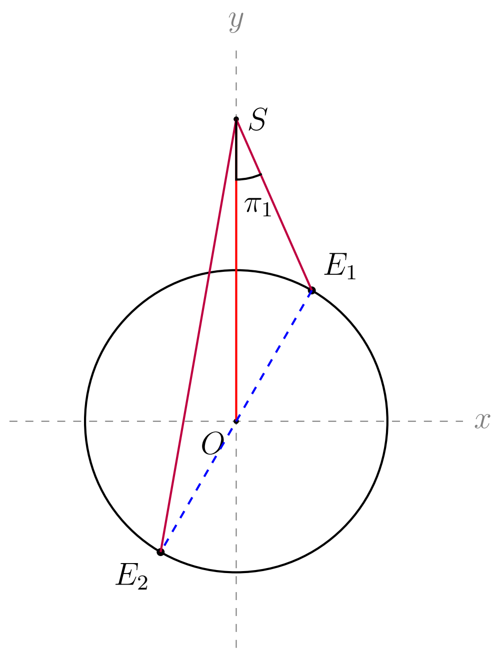


Рис. 6: Параллактическое смещение. Поскольку расстояние до звезды много больше радиуса орбиты Земли, параллактические углы равны, так как они опираются на одну и ту же базу $a_{\oplus} \sin\varphi$

Тогда за полгода изменение координат за счет прецессии будет равно $\xi/2$, где $\xi = 50.2'' = 360°/25800$ лет – постоянная прецессии на эклиптике, где находится звезда. Эклиптическая долгота звезды увеличится на эту величину, а широта меняться не будет.

Изменение эклиптической долготы за счет аберрации будет равно $2\gamma\cos\varphi$, а широта также останется без изменений.

Рассмотрим вариант с точками на орбите E_3 и E_4.

Изменение за счет параллактического смещения будет также только по долготе $2\pi\sin\varphi$. В случае данной задачи все прецессия и аберрация увеличивают долготу, а параллактическое смещение уменьшает. И все эти изменения компенсируются собственным движением.

$$\frac{\xi}{2} + 2\gamma\cos\varphi - 2\pi\sin\varphi = \frac{\mu}{2}$$
$$25.1'' + 30.2'' - 2\pi\sin\varphi = \frac{\mu}{2}$$

Получить сразу отношение величины μ/π из такой записи и подставить его в формулу для трансверсальной скорости не видится возможным. Но мы можем провести оценку. Возможные значения параллакса $\pi \in [0''; 1'']$. Тогда можно получить ограничения на величину $\mu \in [110.6; 113.5]''$/год. Величина получилась очень большой.

Отсюда можно получить оценку снизу на трансверсальную скорость.

$$V_{\tau,\min} = 4.74\frac{\mu}{\pi} = 524 \text{ км/с}$$

В этом случае лучевая скорость много меньше трансверсальной, поэтому полная скорость будет также больше или равна 524 км/с. Данное значение звучит малореалистично.

Рассмотрим вариант с точками на орбите E_1 и E_2.

$$\frac{\xi}{2} - 2\gamma\cos\varphi - 2\pi\sin\varphi = \frac{\mu}{2}$$
$$25.1'' - 30.2'' - 2\pi\sin\varphi = \frac{\mu}{2}$$

Ограничения на величину $\mu \in [10.5; 13.6]''$/год. Величина получилась очень большой.

Отсюда можно получить оценку снизу на трансверсальную скорость.

$$V_{\tau,\min} = 4.74\frac{\mu}{\pi} = 64.4 \text{ км/с}$$

При оценке полной скорости в этом варианте нужно учитывать вклад лучевой скорости,

$$V = \sqrt{v_r^2 + v_\tau^2} = \sqrt{15^2 + 64.4^2} \approx 66 \text{ км/с}$$

Ответ: $b = 0°$, $l = 222.3°$, $v > 66$ км/с.

Критерии оценивания. **16**

Основной вариант решения

При оценивании данной задачи арифметическая ошибка в каком-либо критерии или пункте снижает оценку за этот критерий или пункт до 0 баллов. Каждый пункт оценивается только в случае верного его выполнения.

К1. Определение эклиптической широты (0°) **2**

К2. Определение эклиптической долготы **6**

Определение проекции скорости Земли на луч зрения 2

Определение угла φ 2

Определение значения эклиптической долготы (1 балл за каждый вариант) . . 2×1

Ошибка в долготе на 180° оценивается как $2 + 2 + 0$

К3. Определение лучевой гелиоцентрической скорости **2**

К4. Определение трансверсальной гелиоцентрической скорости **4**

Равенство параллактического смещения и собственного движения за год 2

Определение величины трансверсальной гелиоцентрической скорости 2

К5. Определение величины полной гелиоцентрической скорости **2**

Критерии оценивания. **16**

Второй вариант решения. Применяется только в том случае, когда участник явно прописал, что рассматривает эффекты прецессии и аберрации.

При оценивании данной задачи арифметическая ошибка в каком-либо критерии или пункте снижает оценку за этот критерий или пункт до 0 баллов. Каждый пункт оценивается только в случае верного его выполнения.

К1. Определение эклиптической широты ($0°$) **2**

К2. Определение эклиптической долготы **6**

Определение проекции скорости Земли на луч зрения 2

Определение угла φ 2

Определение значения эклиптической долготы 2

Ошибка в долготе на $180°$ оценивается как $2 + 2 + 0$

К3. Определение лучевой гелиоцентрической скорости **2**

К4. Оценка величины полной гелиоцентрической скорости **6**

Верная запись для всех эффектов (ξ, γ и π), которые меняют координаты . . . . 3×1

Выражение связи всех эффектов 1

Определение значения минимальной полной скорости 2

10.10. Капелла

В. Б. Игнатьев

Капелла (Альфа Возничего) – одна из самых ярких звезд ночного неба. При этом она расположена достаточно близко к нам, ее параллакс равен $0.076''$. С появлением возможности получать спектры звезд и измерять их скорости стало известно, что Капелла – двойная звезда с периодом обращения компонент друг относительно друга, равным 104 дня. При этом эксцентриситет орбит равен нулю, а наклонение, угол между картинной плоскостью и плоскостью орбиты, составляет $43°$.

Вам дан график зависимости лучевых скоростей компонент системы в километрах в секунду от зависимости от фазы, доли периода. Определите, какое максимальное угловое расстояние может быть между этими звездами и его погрешность. Можно ли их различить в телескоп с диаметром 2.5 м при качестве атмосферы в $0.7''$.

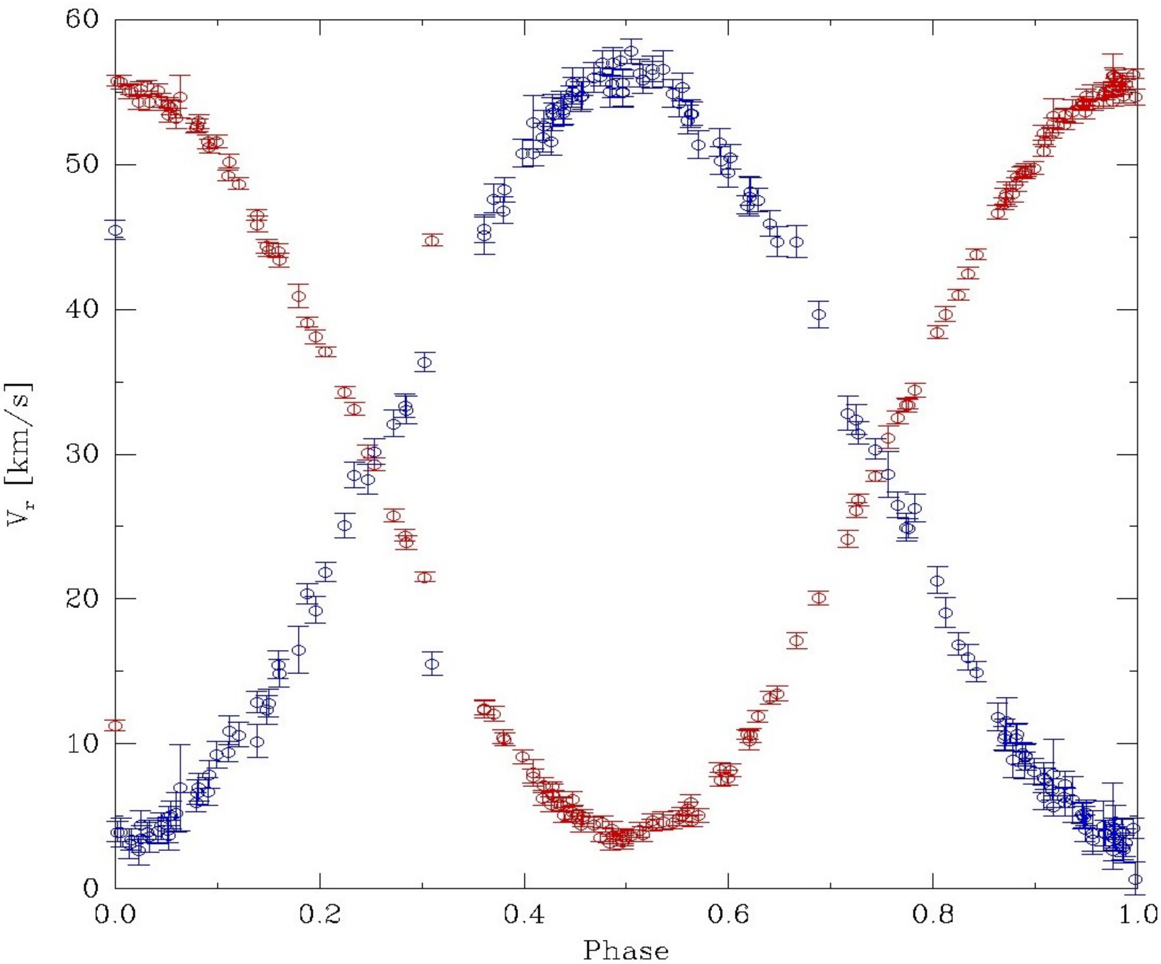


Рис. 7: Изображение к задаче 10.10.

Решение. Разобьем задачу на этапы. На первом этапе проанализируем представленный график. Обратим внимание, что графики лучевой скорости компонент пересекаются при значении величины на оси абсцисс 30 км/с. В этот момент лучевые скорости компонент одинаковы, а значит, с такой скоростью от наблюдателя удаляется центр масс системы. Вспомним, что скорость центра масс системы, в отличие от скоростей компонент, не будет меняться со временем.

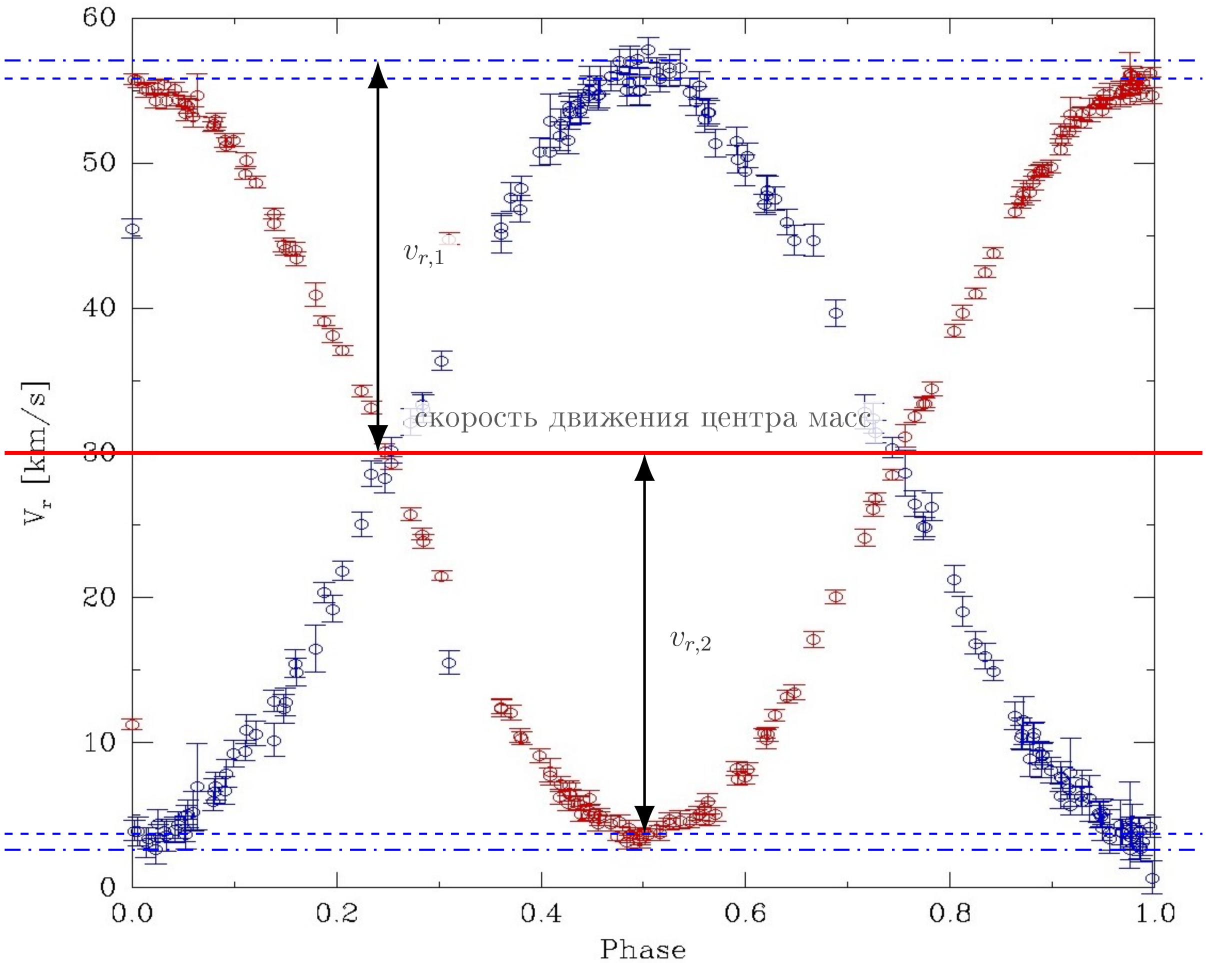


Рис. 8: Снятие данных с графика

Зная скорость центра масс, можно получить амплитуды лучевых скоростей каждой из компонент. Припишем «синей» компоненте индекс 1, а «красной» – индекс 2. Для снятия данных с графика проведем горизонтальные касательные к каждой из кривых лучевой скорости. Расстояние по рисунку от линии скорости центра масс до максимума «синей» компоненты, получается равным 47 ± 1 мм, а до максимума «красной» компоненты – 46 ± 1 мм. Конкретные цифры расстояний (в миллиметрах), получаемые участниками, могут отличаться от приведённых здесь из-за особенностей печати заданий в различных регионах.

Также определим масштаб графика μ по оси Y для этого измерим, например, расстояние между значениями 0 км/с и 60 км/с. Получим значение 107 ± 1 мм.

Теперь можем получить величины максимальных лучевых скоростей (которые уже не зависят от особенностей печати заданий и при верных измерениях у участников должны совпадать с авторскими значениями):

$$v_{r,1} = \frac{47}{107} \cdot 60 \text{ км/с} = 26.4 \text{ км/с} \qquad v_{r,2} = \frac{46}{107} \cdot 60 \text{ км/с} = 25.8 \text{ км/с}$$

Выполним оценку абсолютной $\Delta\mu$ и относительной ε_μ погрешностей определения величины μ – масштаба графика лучевой скорости. Цена деления стандартной линейки $\ell_0 = 1$ мм, тогда абсолютная $\Delta\mu_{\text{м}}$ и относительная ε_v погрешности масштаба μ будут:

Абсолютная ошибка $\Delta\mu$ величины μ

$$\Delta\mu = \mu\frac{\ell_0}{\ell},$$

Относительная ошибка ε_μ величины μ

$$\varepsilon = \frac{\Delta\mu}{\mu}\cdot 100\% = \frac{\ell_0}{\ell}\cdot 100\%.$$

При записи последнего результата мы учли, что $(\ell_0/\ell_{ij}) \ll 1$. Тогда относительная ε_μ и абсолютная $\Delta\mu$ погрешности можно записать так:

$$\varepsilon_\mu = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{107} = 0.0093 \approx 0.93\%$$

$$\Delta\mu = \frac{\varepsilon_\mu}{100\%}\cdot\mu = \frac{\frac{1}{107}}{100\%}\cdot 60 = 0.56\frac{\text{км}}{\text{с мм}}.$$

Представим **общий алгоритм оценки погрешностей** измеряемой угловой величины на примере абстрактной величины X. Погрешность складывается из погрешности измерение самой величины линейкой ℓ_0 и погрешности масштаба, при помощи которого переводим измеряемые линейкой величины в угловые величины:

$$X \pm \Delta X = (L \pm \ell_0)\cdot(\mu \pm \Delta\mu) \approx (L\cdot\mu)\left(1 + \frac{\ell_0}{L} + \frac{\Delta\mu}{\mu}\right) = X\left(1 + \frac{\ell_0}{L} + \frac{\Delta\mu}{\mu}\right)$$

Абсолютная погрешность величины X

$$\Delta X = X\left(\frac{\ell_0}{L} + \frac{\Delta\mu}{\mu}\right),$$

Относительная погрешность величины X

$$\varepsilon_X = \frac{\Delta X}{X}\cdot 100\% = \frac{\ell_0}{L}\cdot 100\% + \frac{\Delta\mu}{\mu}\cdot 100\% = \varepsilon_L + \varepsilon_\mu$$

$$\Delta X = X\cdot\frac{\varepsilon_X}{100\%}$$

$$\Delta v_{r,1} = v_{r,1}\left(\frac{\ell_0}{L} + \frac{\Delta\mu}{\mu}\right) = 26.4\left(\frac{1}{47} + \frac{0.56}{47}\right)\ \text{км/с} = 0.9\ \text{км/с}$$

$$\Delta v_{r,2} = 25.8\left(\frac{1}{46} + \frac{0.56}{46}\right)\ \text{км/с} = 0.9\ \text{км/с}$$

Можно исключить из рассмотрения определение скорости центра масс, рассчитав максимальное и минимальное значение скоростей, а затем определив амплитуду скорости как половину их разности. В этом случае участник проделывает те же действия и вычисления «в уме», в явном виде их не описывая, и возможно, не осознавая. При этом такое решение засчитываться как полное при наличии верно полученного значения амплитуд скоростей.

Зная угол наклона плоскости орбит системы к лучу зрения, можем получить и орбитальную скорость каждой компоненты:

$$v_r = v_o \sin i \qquad \rightarrow \qquad v_{o,1} = \frac{v_{r,1}}{\sin i} = \frac{v_{r,1}}{\sin(43°)}$$

На следующем этапе свяжем орбитальную скорость каждого компонента системы с радиусом круговой орбиты каждого из компонентов вокруг общего центра масс:

$$v_{o,i} = \frac{2\pi R_i}{T} \qquad \rightarrow \qquad R_i = \frac{v_{o,i} T}{2\pi}$$

Расстояние между компонентами системы равно $a = R_1 + R_2$

$$a = \frac{T}{2\pi}(v_{o,1} + v_{o,2}) = \frac{T}{2\pi \sin(43°)}(v_{r,1} + v_{r,2})$$

Подставим значения:

$$a = \frac{104 \cdot 86400 \text{ с}}{2\pi 0.682}(26.4 + 25.8) \cdot 10^3 \text{ м/с} = 1.09 \cdot 10^{11} \text{ м} = 0.73 \text{ а.е.}$$

В случае ошибочного использования $\cos i$ минимальное значение составит $a = 0.68$ а.е.

Найдем ошибку определения радиуса орбиты:

$$\Delta a = a\sqrt{\left(\frac{\Delta v_{r,1}}{v_{r,1}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_{r,2}}{v_{r,2}}\right)^2} = 0.7\sqrt{\left(\frac{0.9}{26.4}\right)^2 + \left(\frac{0.9}{25.8}\right)^2} \approx 0.03$$

В случае ошибочного использования $\cos i$ ошибка определения радиуса орбиты составит также $\Delta a = 0.03$ а.е.

Следующий этап решения – это представление видимого расположения двух звезд в картинной плоскости наблюдателя. С учетом того, что орбиты круговые, но имеют наклонение 43°, видимая орбита одной звезды относительно другой звезды будет представлять собой эллипс с большой полуосью a и малой полуосью $b = a \sin i = a \sin(43°) = 0.682a$. Оценим угловой размер при максимальном и минимальном расстоянии между звездами в картинной плоскости.

Максимальное значение:

$$\rho_{\max} = \frac{206265\ a}{r} = \frac{a \text{ а.е}}{r \text{ пк}} = 0.055''$$

В случае ошибочного использования $\cos i$ максимальное значение составит $\rho_{\max} = 0.052''$

Найдем ошибку определения $\rho_{\max}$:

$$\Delta\rho_{\max} = \rho_{\max}\frac{\Delta a}{a} = \frac{206265\ a}{r}\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta a \text{ а.е}}{r \text{ пк}} = \Delta a \text{ а.е}\pi = 0.03 \cdot 0.076'' \approx 0.002''$$

В случае ошибочного использования $\cos i$ ошибка определения максимального углового разделения составит теже $\Delta\rho_{\max} = 0.002''$

Получив значения углового разделения звезд, можно сразу сделать вывод, что такие углы для большей части наземной астрономии недоступны, так как полученная величина на порядок меньше величины размытия атмосферы и величины дифракционного предела объектива телескопа. Тем не менее, при помощи методов спекл-интерферометрии можно обойти ограничения, связанные с атмосферой.

Ответ. $\rho_{\max} = 0.055'' \pm 0.002''$. Для наземных телескопов эта система неразрешима.

Критерии оценивания. **20**

Каждый пункт оценивается только в случае верного его выполнения и получения верного численного ответа.

К1. Снятие данных с графика **8**

Определение скорости движения центра масс 2

Определение масштаба графика (км/с на мм) 2

Определение лучевых скоростей компонент с точностью ± 2 км/с . . . . 2×2

Если участник снял масштаб с графика, определив расстояние между двумя соседними рисками, либо вообще не описал метод снятия масштаба, за второй подпункт ставится не более 1 балла при верном полученном значении скоростей

К2. Определение полуоси орбиты **5**

Связь полуоси и суммы орбитальных скоростей 2

Связь полуоси и суммы лучевых скоростей 2

Получение значения большой полуоси 1

Участник мог не использовать наклонение орбиты в своем решении. Это важный этап решения задачи, так как если бы орбита двойной системы лежала в картинной плоскости, лучевые скорости были бы неизмеряемы, и, как следствие, мы бы не узнали, что Капелла – кратная звезда. Такое решение оценивается не более, чем в $2 + 0 + 0$ балла из 5 за данный критерий. Участник мог ошибиться в определении угла наклонения и вместо $\sin i$ использовать $\cos i$. В этом случае данный пункт оценивается как $2 + 0 + 1$ балл

К3. Определение углового разделения между звездами **2**

К4. Вывод о том, что такое угловое разделение недоступно для наблюдений **2**

Если участник не определил скорость движения центра масс, но получил верные значения амплитуд скоростей, то решение засчитывается в полном объеме. Если же в решении появляются амплитуды скоростей порядка 55 км/с, то задача оценивается в ноль баллов.

К5. Определение погрешности величины **3**

Определение погрешности масштаба 1

Определение погрешности лучевой скорости 1

Определение погрешности углового расстояния 1