

## Содержание

11.1. Считаем сверхновые . . . . .	2
11.2. Зависит от точки зрения . . . . .	4
11.3. Усыхающий Нептун . . . . .	6
11.4. Не эта эпоха . . . . .	8
11.5. Спектральный вальс . . . . .	10

### 11.1. Считаем сверхновые

*П.В.Бакланов*

Статистика наблюдений сверхновых гласит, что в течение 18 месяцев в 2023–2024 годах было открыто 3156 сверхновых типа Ia и 869 сверхновых типа II. В то же время теоретическое моделирование показывает, что 24% вспышек сверхновых относятся к типу Ia, а 57% вспышек — к типу II. Можно считать, что в пределах одного типа сверхновых их абсолютная звездная величина в максимуме блеска одинакова, сверхновые распределены в пространстве равномерно и изотропно.

Воспользовавшись этими данными, определите, какие сверхновые ярче. На сколько звездных величин абсолютная звездная величина сверхновых подтипа Ia в максимуме блеска отличается от аналогичной величины для сверхновых типа II?

**Решение.** Значения  $p_1 = 24\%$  и  $p_2 = 57\%$  дают нам информацию о распределении сверхновых по типам в единице объема. Это условие можно сформулировать следующим образом: число сверхновых  $i$ -го типа в некотором объеме Вселенной  $V_0$  равно

$$N_i = p_i \cdot n_0 \cdot V_0,$$

где  $n_0$  — концентрация всех сверхновых в единице объема.

Для наблюдателя на Земле, считающего сверхновые на небе, доступный для наблюдений объем имеет форму шара и равен  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ , где  $R$  — предельное расстояние, на котором он способен открыть сверхновую данного типа в ее максимуме блеска. Тогда отношение числа открытых сверхновых разных типов равно

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{p_1 \cdot n_0 R_1^3}{p_2 \cdot n_0 R_2^3}. \quad (1)$$

Разумно предположить, что предельная освещенность, создаваемая сверхновой, которую способен зарегистрировать наблюдатель на Земле, не зависит от типа сверхновой. Запишем связь между предельной освещенностью  $E$ , светимостью сверхновой  $L$  и предельным расстоянием  $R$

$$E = \frac{L}{4\pi R^2}$$

и приравняем освещенности, создаваемые наиболее удаленными сверхновыми каждого типа:

$$\frac{L_1}{4\pi R_1^2} = \frac{L_2}{4\pi R_2^2}.$$

Отсюда получаем, что отношение светимостей сверхновых разных типов будет равно квадрату отношения предельных расстояний, с которых эти сверхновые могут быть обнаружены

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2.$$

Отношение расстояний мы можем получить из выражения (1), тогда

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{p_2}{p_1}\right)^{2/3}. \quad (2)$$

Тогда искомая разность абсолютных звездных величин равна:

$$\Delta M = M_1 - M_2 = -2.5 \lg \frac{L_1}{L_2} = -\frac{5}{3} \lg \left(\frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{p_2}{p_1}\right).$$

Осталось провести вычисления:

$$\Delta M = -\frac{5}{3} \lg \left( \frac{3156}{869} \cdot \frac{0.57}{0.24} \right) \approx -1^m.6.$$

Таким образом, сверхновые типа Ia ярче сверхновых типа II примерно на  $1^m.6$ .

### Критерии оценивания.

- К1.** Явно или неявно сделанный вывод о том, что предельная освещенность (видимая звездная величина) при наблюдении сверхновых не зависит от их типа ..... **2**
- К2.** Получение формулы (1) или ее верного аналога (например, в виде пропорциональности) ..... **4**
- К3.** Получение формулы (2) или ее верного аналога ..... **4**
- К4.** Вывод о том, что сверхновые типа Ia ярче ..... **2**
- К5.** Правильный численный ответ (допустимы значения  $|\Delta M| = 1^m.6 \pm 0^m.1$ ) ..... **4**
- Максимальная оценка:** **16**

## 11.2. Зависит от точки зрения

*А.В.Веселова*

Земляне проводят наблюдения астероида. Известно, что его орбитальный период составляет 8 лет, эксцентриситет орбиты равен 0,4, а ее наклон составляет  $40^\circ$ . Астероид наблюдается в афелии орбиты, расположенном симметрично относительно линии узлов (прямой, являющейся пересечением плоскостей орбит Земли и астероида). Какой может быть наблюдаемая (геоцентрическая) эклиптическая широта астероида в этот момент?

**Решение.** Поскольку точка афелия симметрична относительно линии узлов, это означает, что в афелии астероид находится не только дальше всего от Солнца, но и дальше всего от плоскости эклиптики. Пусть для определенности астероид находится над плоскостью эклиптики, в противном случае мы получим симметричный с точностью до знака набор ответов.

Определим большую полуось орбиты, а затем поймем, вне или внутри земной орбиты находится проекция афелия на плоскости эклиптики:

$$(T[\text{годы}])^2 \equiv (a[\text{а. е.}])^3 \Rightarrow a = 4 \text{ а. е.}$$

Расстояние от Солнца до проекции точки афелия на плоскость эклиптики составит

$$R_\alpha = r_\alpha \cos i = a(1 + e) \cos i = 4 \cdot (1 + 0.4) \cos 40^\circ = 4.3 \text{ а. е.}$$

Следовательно, проекция афелия находится вне орбиты Земли. В таком случае (см. чертеж) максимальное и минимальное значения эклиптической широты будут соответствовать максимальному и минимальному удалению наблюдателя от астероида.

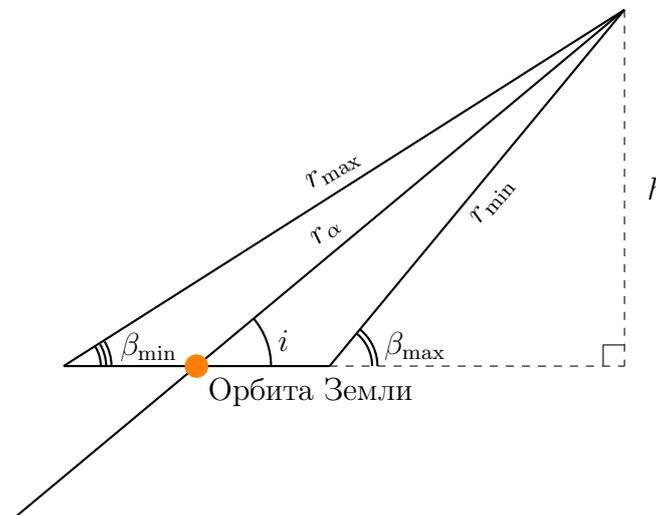


Рис. 1: Чертеж к решению задачи 2.

Максимальное значение эклиптической широты найдем таким образом: определим расстояние от Земли до астероида по теореме косинусов, затем по теореме синусов оценим широту.

$$r_{\min} = \sqrt{r_\alpha^2 + a_\oplus^2 - 2r_\alpha \cdot a_\oplus \cos i} = \sqrt{5.6^2 + 1^2 - 2 \cdot 5.6 \cdot 1 \cdot \cos 40^\circ} = 4.9 \text{ а. е.},$$

$$\frac{\sin(180^\circ - \beta_{\max})}{r_\alpha} = \frac{\sin i}{r_{\min}} \Rightarrow \sin \beta_{\max} = \frac{r_\alpha}{r_{\min}} \cdot \sin i \Rightarrow \beta_{\max} = 47^\circ.$$

Аналогично определим минимальное значение эклиптической широты:

$$r_{\max} = \sqrt{r_{\alpha}^2 + a_{\oplus}^2 - 2r_{\alpha} \cdot a_{\oplus} \cos(180^{\circ} - i)} = \sqrt{5.6^2 + 1^2 - 2 \cdot 5.6 \cdot 1 \cdot \cos 140^{\circ}} = 6.4 \text{ а. е.},$$

$$\frac{\sin \beta_{\min}}{r_{\alpha}} = \frac{\sin i}{r_{\max}} \Rightarrow \sin \beta_{\min} = \frac{r_{\alpha}}{r_{\max}} \cdot \sin i \Rightarrow \beta_{\min} = 34^{\circ}.$$

Таким образом, при расположении афелия над плоскостью эклиптики диапазон наблюдаемых эклиптических широт составит  $[34^{\circ}; 47^{\circ}]$ , а с учетом расположения афелия под плоскостью эклиптики диапазон примет вид  $[-47^{\circ}; -34^{\circ}] \cup [34^{\circ}; 47^{\circ}]$ .

### Критерии оценивания.

<b>К1.</b> Вычисление радиуса орбиты, получение верного ответа .....	<b>2</b>
<b>К2.</b> Верное понимание наклона орбиты (угол с центром в Солнце) .....	<b>1</b>
<b>К3.</b> Верный расчет (или верная формула) для расстояния от Солнца до астероида в афелии .....	<b>1</b>
<b>К4.</b> Верное понимание и указание конфигураций, при которых достигаются наименьшая и наибольшая широты (по модулю или просто положительные) .....	<b>2</b>
<b>К5.</b> Геометрические построения и/или верные формулы для получения граничных значений широты .....	<b>5</b>
<b>К6.</b> Расчет верных значений максимальной и минимальной широт (по модулю или просто положительных), допустима погрешность $\pm 1^{\circ}$ .....	<b>1+1</b>
<b>К7.</b> Указание интервала для широт вместо отдельных граничных значений .....	<b>1</b>
<b>К8.</b> Верный учет отрицательных широт (явное указание соответствующего интервала в качестве части ответа) .....	<b>2</b>
<b>Максимальная оценка:</b>	<b>16</b>

### 11.3. Усыхающий Нептун

*П.А. Тараканов*

Известно, что Нептун излучает в единицу времени в 2.5 раза больше энергии, чем получает от Солнца. Оцените, на какую величину изменяется радиус Нептуна за один его оборот вокруг Солнца, если известно, что вид зависимости плотности от радиуса у него при этом не изменяется. Радиус Нептуна равен 25 тыс. км, масса —  $1.0 \cdot 10^{26}$  кг. Можно считать, что Нептун является абсолютно черным телом, а радиус его орбиты вокруг Солнца равен 30 а.е.

**Решение.** Поскольку Нептун является планетой (а не звездой и не бурным карликом), то источником дополнительной энергии термоядерный синтез в нем служить не может. Выделение энергии за счет радиоактивного распада тяжелых ядер у планет пренебрежимо мало, и единственным источником дополнительной энергии может являться только постепенное сжатие Нептуна, которое и приводит к изменению его радиуса.

Потенциальная энергия  $\Phi$  самогравитирующего газового шара может быть выражена как

$$\Phi = -\varkappa \frac{GM^2}{R}, \quad (3)$$

где  $M$  — масса шара,  $R$  — его радиус,  $\varkappa$  — коэффициент, зависящий от распределения плотности внутри шара, во всех «естественных» случаях  $\varkappa \approx 1$ .

Поскольку сжатие происходит медленно, то в каждый момент времени для Нептуна выполняется вириальное соотношение  $2U + \Phi = 0$  (тут  $U$  — внутренняя энергия Нептуна) и  $U = -\frac{\Phi}{2}$ , откуда следует, что только половина выделяющейся при сжатии энергии будет расходоваться на излучение, а вторая половина — на нагрев Нептуна, поскольку и изменения энергий связаны так же,  $dU = -\frac{d\Phi}{2}$ .

Получим зависимость изменения радиуса от изменения потенциальной энергии, продифференцировав соотношение (3):

$$d\Phi = \varkappa \frac{GM^2}{R^2} dR$$

или, считая оба изменения положительными величинами (хотя и потенциальная энергия, и радиус уменьшаются),

$$\Delta\Phi = \varkappa \frac{GM^2}{R^2} \Delta R.$$

Заметим, что тот же результат можно получить и путем вычитания друг из друга значений потенциальной энергии для  $R$  и  $R - \Delta R$ , а затем отбрасывания малых членов, но так эффективнее.

По условию энергия  $\Delta E$ , получаемая Нептуном от Солнца за один его оборот вокруг Солнца, будет связана с  $\Delta\Phi$  как

$$(2.5 - 1) \cdot \Delta E = \frac{\Delta\Phi}{2} \Rightarrow \Delta\Phi = 3\Delta E.$$

Эта же энергия, поскольку Нептун по условию абсолютно черное тело, может быть выражена как

$$\Delta E = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \cdot \pi R^2 \cdot P,$$

где  $L_{\odot}$  — светимость Солнца,  $r$  — радиус орбиты Нептуна,  $P$  — орбитальный период Нептуна. Тогда

$$\Delta R = \frac{R^2 \Delta\Phi}{\varkappa GM^2} = \frac{3L_{\odot} R^4 P}{4r^2 \varkappa GM^2}.$$

Для вычислений осталось определить некоторые недостающие параметры. Коэффициент  $\kappa$  можно принять равным 1, а орбитальный период Нептуна либо вспомнить (165 лет), либо вычислить из III закона Кеплера как  $P = 30^{3/2}$  лет, что составляет  $P = 5.2 \cdot 10^9$  с.

Окончательно вычисляем (все величины в СИ)

$$\Delta R = \frac{3 \cdot 3.9 \cdot 10^{26} \cdot (25 \cdot 10^6)^4 \cdot 5.2 \cdot 10^9}{4 \cdot (30 \cdot 1.5 \cdot 10^{11})^2 \cdot 6.7 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{52}} \approx 0.044 \text{ м} \approx 4 \text{ см.}$$

Итого за один оборот вокруг Солнца радиус Нептуна уменьшается примерно на 4 см.

### Критерии оценивания.

<b>К1.</b> Утверждение о гравитационном сжатии как источнике энергии .....	<b>3</b>
Если участник его использует, но никак не формулирует .....	<b>2</b>
<b>К2.</b> Выражение (3), явно записанное или неявно используемое .....	<b>1</b>
<b>К3.</b> Связь $\Delta\Phi$ и $\Delta R$ , полученная любым способом .....	<b>2</b>
<b>К4.</b> Выражение (или вычисление) энергии $\Delta E$ .....	<b>2</b>
<b>К5.</b> Учет вириального соотношения, достаточен результат .....	<b>2</b>
При его отсутствии все остальные части решения оцениваются полным баллом (итоговый ответ при этом должен уменьшиться в 2 раза).	
<b>К6.</b> Оценка коэффициента $\kappa = 1$ .....	<b>2</b>
Если участник использует значение для однородного шара $\kappa = 3/5$ .....	<b>1</b>
<b>К7.</b> Знание или вычисление орбитального периода Нептуна .....	<b>2</b>
<b>К8.</b> Правильный итоговый ответ (достаточна порядковая точность, $1 \div 10$ см) .....	<b>2</b>
<b>Максимальная оценка:</b>	<b>16</b>

Если в решении явно указано, что радиус Нептуна *увеличивается*, то за все решение выставляется не более **4** баллов.

### 11.4. Не эта эпоха

*В.В.Григорьев*

Звезда Завийява ( $\eta$  Девы) на эпоху J2000.0 имеет экваториальные координаты  $\alpha = 11^h 50^m 44^s$ ,  $\delta = +1^\circ 45' 43''$ . Ее собственное движение  $\mu = 0''.7886/\text{год}$  с позиционным углом  $\gamma = 110^\circ$  (позиционный угол отсчитывается от направления на Северный полюс мира в сторону увеличения прямого восхождения). Определите экваториальные координаты Завийявы для эпохи J2050.0. Нутацией пренебречь.

**Решение.** Координаты Завийявы будут изменяться вследствие двух причин: собственного движения (красная стрелка на рисунке ниже), а также прецессии оси вращения Земли, то есть смещения точки весеннего (и осеннего) равноденствия вдоль эклиптики (темно-синяя стрелка, длины стрелок не в масштабе), нутацией по условию мы пренебрегаем. Синей прерывистой линией изображена граница между созвездиями Дева и Лев, тонким пунктиром показана экваториальная сетка на эпоху J2000.0: по вертикали отложено склонение, по горизонтали — прямое восхождение (увеличивающееся справа налево).

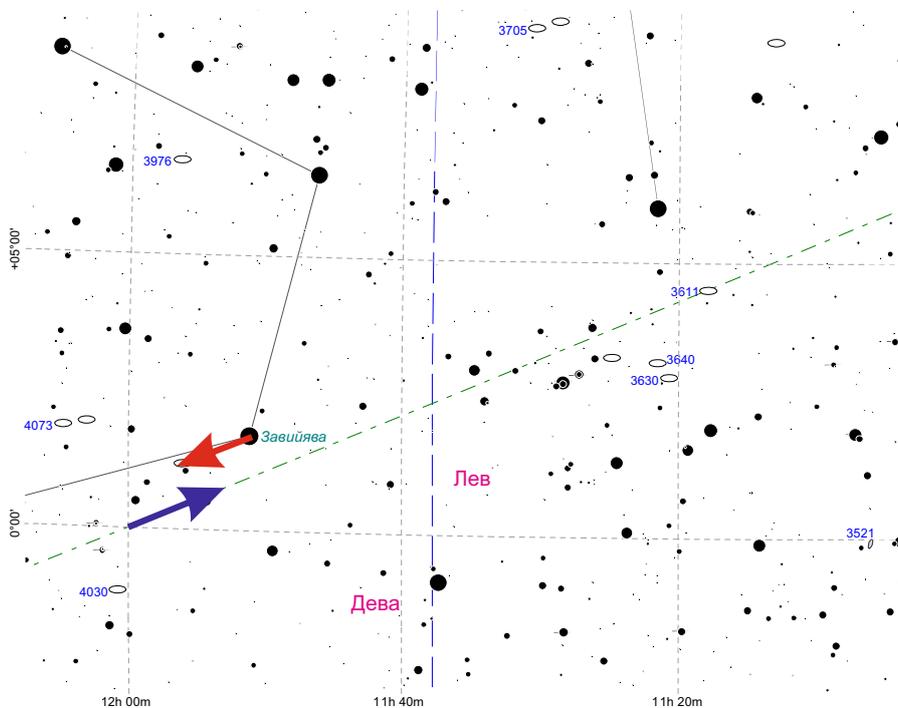


Рис. 2: К решению задачи 4.

Звезда находится практически точно в точке осеннего равноденствия — точке пересечения небесного экватора и эклиптики (штрих-пунктирная зеленая линия), которая движется вдоль эклиптики со скоростью  $\zeta = 50''.23/\text{год}$  за счет прецессии оси вращения Земли (происходит с периодом около 25800 лет, откуда величину  $\zeta$  можно получить как угол, равный  $1/25800$  доле угла  $360^\circ$ ) в сторону созвездия Льва. Поэтому будем считать, что координаты всех близлежащих звезд будут изменяться согласно этому же закону.

Сначала вычислим компоненты собственного движения. Косинусом склонения в данном случае можно пренебречь, т.к. склонение звезды мало (а косинус очень близок к единице), а собственное движение будет менять лишь доли угловой секунды:

$$\begin{cases} \mu_\alpha = \mu \sin \gamma = 0''.741/\text{год} \\ \mu_\delta = \mu \cos \gamma = -0''.270/\text{год} \end{cases}$$

Теперь займемся прецессией. Она изменяет координаты звезд в обратную сторону, чем, фактически, обеспечивает дополнительное собственное движение Завийявы примерно в ту же сторону, куда направлено и истинное (поскольку перемещение точки осеннего равноденствия происходит в сторону, обратную собственному движению звезды). Скорость изменения координат звезды вследствие прецессии вычисляется так:

$$\begin{cases} \hat{\mu}_\alpha = \zeta \cos \varepsilon = 46''.085/\text{год} \\ \hat{\mu}_\delta = -\zeta \sin \varepsilon = -19''.980/\text{год} \end{cases}$$

Здесь  $\varepsilon = 23^\circ 26' 22''$  — наклон небесного экватора к эклиптике на эпоху J2000.0, который указан в справочных данных.

Осталось лишь вычислить новые координаты  $(\alpha', \delta')$  звезды через  $t = 50$  лет после введения эпохи J2000.0, не забыв, что собственное движение по прямому восхождению мы выражали в секундах дуги и соответствующие величины надо перевести в секунды времени:

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha + (\hat{\mu}_\alpha + \mu_\alpha)t \\ \delta' = \delta + (\hat{\mu}_\delta + \mu_\delta)t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha' = 11^h 50^m 44^s + (46''.085 + 0''.741) \cdot 50 \times \left(\frac{1}{15}\right)^{s''} = 11^h 50^m 44^s + 156^s \\ \delta' = 1^\circ 45' 43'' + (-19''.980 - 0''.270) \cdot 50 = 1^\circ 45' 43'' - 1012''.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha' = 11^h 50^m 44^s + 2^m 36^s = 11^h 53^m 20^s \\ \delta' = 1^\circ 45' 43'' - 16' 52''.5 = +1^\circ 28' 51'' \end{cases}$$

### Критерии оценивания.

<b>К1.</b> Понимание необходимости учета прецессии .....	<b>2</b>
<b>К2.</b> Вычисление (или знание) значения постоянной прецессии $\zeta$ (допустима погрешность $\pm 0''.2/\text{год}$ ) .....	<b>2</b>
<b>К3.</b> Правильные абсолютные значения (для соответствующей величины правильно указано не менее 2 значащих цифр) $\mu_\alpha, \mu_\delta, \hat{\mu}_\alpha, \hat{\mu}_\delta$ .....	<b>1+1+1+1</b>
<b>К4.</b> Правильные знаки $\mu_\alpha, \mu_\delta, \hat{\mu}_\alpha, \hat{\mu}_\delta$ .....	<b>1+1+1+1</b>
<b>К5.</b> Правильное итоговое значение $\alpha'$ (допустима погрешность $\pm 5^s$ ) .....	<b>2</b>
<b>К6.</b> Правильное итоговое значение $\delta'$ (допустима погрешность $\pm 5''$ ) .....	<b>2</b>
<b>Максимальная оценка:</b>	<b>16</b>

Если участник в выражениях для  $\mu_\alpha, \mu_\delta, \hat{\mu}_\alpha, \hat{\mu}_\delta$  меняет местами синусы и косинусы, то в критерии К3 за каждую ошибочную пару выставляется **1** балл вместо **2**, баллы по критериям К5 и К6 не выставляются.

### 11.5. Спектральный вальс

*М.В.Костина*

Вам дано изображение газового диска, окружающего сверхмассивную черную дыру в центре галактики, а также два спектра, полученных для областей, отмеченных окружностями на изображении. Попавшая на спектры линия излучения — это линия [OIII] с лабораторной длиной волны  $5007 \text{ \AA}$ , в двух отмеченных областях (№1 и №2) ее длина волны достигает минимального и максимального значений для всего диска. Известно также, что угол между плоскостью диска и лучом зрения близок к  $0^\circ$ .

Зная, что угловые размеры приведенного изображения на небе составляют  $5'' \times 5''$ , определите массу черной дыры, выразив ее в массах Солнца. Пекулярную скорость галактики можно считать нулевой.

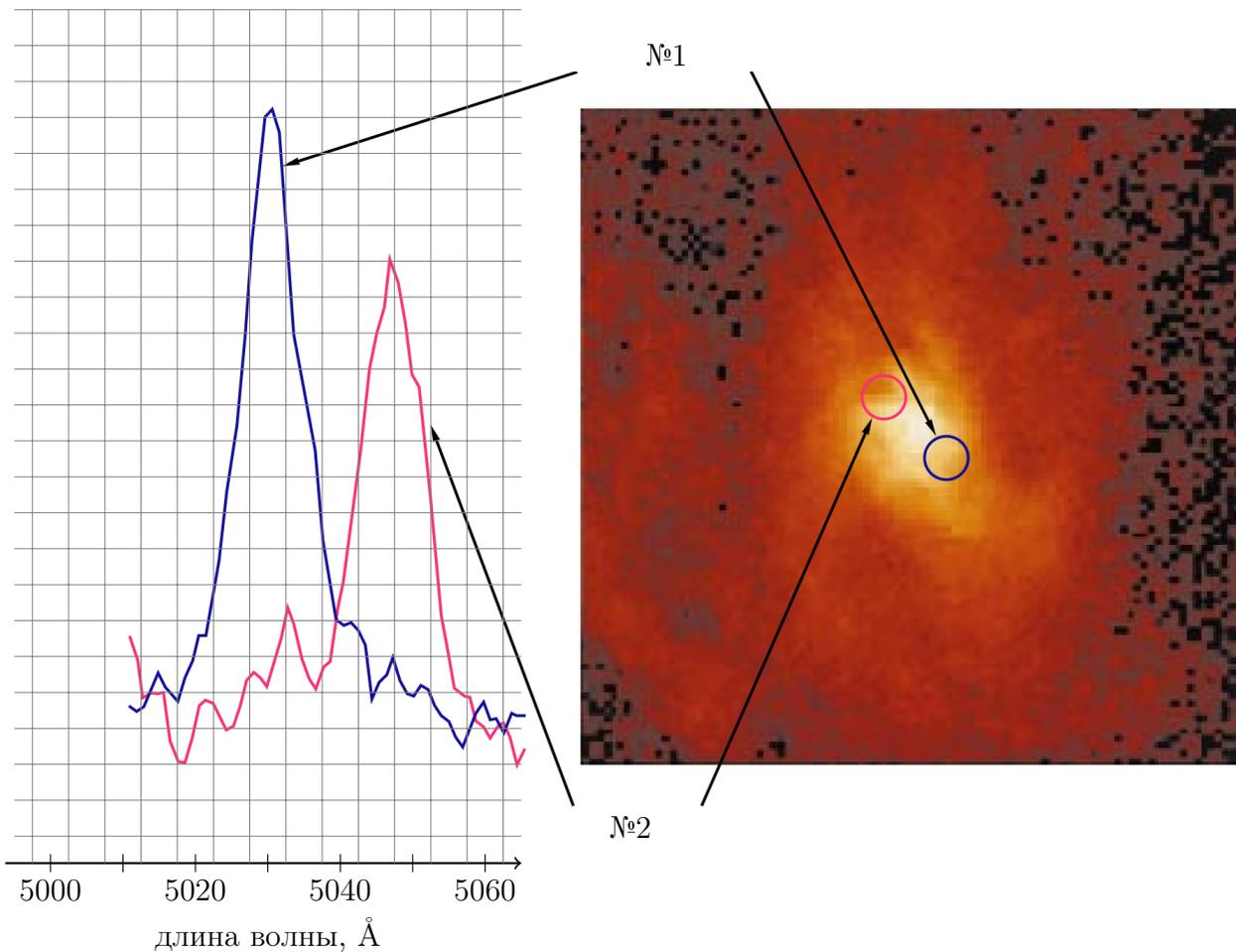


Рис. 3: Изображение к задаче 5.

**Решение.** Поскольку частицы диска движутся вокруг черной дыры с круговой скоростью

$$v^2 = \frac{GM}{R},$$

то масса центральной черной дыры будет равна

$$M = \frac{v^2 R}{G}.$$

Так как требуется найти массу в массах Солнца —  $M_\odot$ , то удобнее воспользоваться естественными для этой задачи единицами измерения:  $M_\odot$ , а.е., год. В этих единицах

$G = 4\pi^2 \text{ а.е.}^3 \text{ год}^{-2} M_{\odot}^{-1}$  (в чем несложно убедиться, записав III закон Кеплера для системы «Солнце–Земля») и

$$M[M_{\odot}] = \frac{1}{4\pi^2} \cdot v^2[\text{а.е./год}] \cdot R[\text{а.е.}].$$

Нам нужно найти радиус диска  $R$  и скорость вращения его частиц на этом радиусе  $v$ . Скорость определим по спектру в левой части рисунка. По условию длины волн линий  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответствуют экстремальным отклонениям лучевой скорости от среднего значения и луч зрения лежит в плоскости диска. Это означает, что мы наблюдаем один край диска, приближающийся к нам с круговой скоростью, а другой — удаляющийся с такой же скоростью (и при этом весь диск как целое также движется относительно нас). Тогда круговой скорости диска будет соответствовать смещение одной из линий, например  $\Delta z_2$ , относительно средней длины волны  $(\lambda_1 + \lambda_2)/2$ .

$$v = c \Delta z_2 = c \frac{\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)/2}{(\lambda_1 + \lambda_2)/2} = c \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Если произвести аналогичную выкладку для  $\Delta z_1$ , получится, естественно, такой же по модулю, но отрицательный результат.

По спектру находим  $\lambda_1 = 5030 \text{ \AA}$  и  $\lambda_2 = 5047 \text{ \AA}$ . Скорость света в единицах а.е./год равна

$$c = 2\pi \cdot \frac{3 \cdot 10^5 \text{ км/с}}{30 \text{ км/с}} = 6.3 \cdot 10^4 \text{ а.е./год}$$

(поскольку Земля с орбитальной скоростью 30 км/с проходит за год  $2\pi$  а.е.). Вычисляем круговую скорость для диска:

$$v = 6.3 \cdot 10^4 \cdot \frac{5047 - 5030}{5047 + 5030} \approx 106 \text{ а.е./год.}$$

Угловой радиус диска найдем по правой части рисунка. Определим масштаб изображения. Сторона квадрата равна 83 мм, значит в одном миллиметре  $5/83 \approx 0''.06$ . Расстояние между областями, для которых получены спектры, на снимке равно 11 мм, следовательно угловое расстояние между ними на небе равно  $0''.66$ . угловой радиус диска равен половине расстояния между его диаметрально противоположными точками, т.е.  $0''.33$ .

Для того, чтобы получить радиус в линейных единицах, нужно знать расстояние до галактики. Его можно получить, зная красное смещение  $z$ . Так как по условию peculiar скорость галактики нулевая, то скорость центра диска обусловлена только космологическим расширением, а соответствующее ей красное смещение подчиняется закону Хаббла:

$$cz = Hr,$$

где  $c$  — скорость света в км/с,  $H \approx 70 \text{ км/с/Мпк}$  — постоянная Хаббла,  $r$  — искомое расстояние в Мпк.

Так как линии в спектре расположены симметрично, то средняя длина волны будет соответствовать положению линии в центре диска. Красное смещение этой средней и будет общим космологическим красным смещением галактики. Среднее арифметическое длин волн линий в спектре равно  $\lambda = 5038.5 \text{ \AA}$ , а лабораторная длина волны  $\lambda_0 = 5007 \text{ \AA}$ . Следовательно, красное смещение галактики

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{5038.5 - 5007}{5007} \approx 0.0063.$$

Отсюда находим расстояние до нее:

$$r = \frac{cz}{H} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 0.0063}{70} \approx 27 \text{ Мпк} = 27 \cdot 10^6 \text{ пк.}$$

Как известно, 1 а.е. с расстояния в 1 пк видна под углом в  $1''$ , следовательно,  $0''.33$ , видимым с расстояния в 1 пк, соответствуют 0.33 а.е., а с расстояния в  $27 \cdot 10^6$  пк —  $0.33 \cdot 27 \cdot 10^6 = 8.9 \cdot 10^6$  а.е. Это и есть искомый радиус диска.

Окончательно находим массу черной дыры:

$$M = \frac{1}{4\pi^2} v^2 \cdot R = \frac{1}{4\pi^2} \cdot 8.9 \cdot 10^6 \cdot (106)^2 = 2.5 \cdot 10^9 M_{\odot}.$$

Отметим также, что все промежуточные вычисления можно выполнять и в любой другой системе единиц (в том числе в СИ), а затем перевести в массы Солнца, итоговый результат от этого, естественно, не поменяется.

### Критерии оценивания.

- К1.** Выражение для массы черной дыры через круговую скорость диска ..... **2**
- К2.** Определение  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  по спектру на рисунке ..... **1+1**
- К3.** Вычисление скорости вращения диска ..... **4**
- К4.** Определение углового радиуса диска по рисунку ..... **2**  
 Если вместо радиуса определен и дальше используется диаметр, то оценка за этот пункт — **1** балл.
- К5.** Понимание того, что красное смещение галактики равно смещению для среднего арифметического  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  ..... **2**
- К6.** Вычисление расстояния до галактики ..... **3**
- К7.** Вычисление (любым способом) линейного радиуса диска ..... **2**
- К8.** Вычисление массы черной дыры ..... **3**  
 Если ответ для массы дан не в массах Солнца, то оценка снижается на **1** балл.
- Максимальная оценка:** **20**