СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ

Основные постоянные

Гравитационная постоянная	$G = 6.672 \cdot 10^{-11}\,\text{m}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
Скорость света в вакууме	$c = 2.998 \cdot 10^8\,\text{m/c}$
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\,\text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$
Астрономическая единица	$1\,\text{а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11}\,\text{m}$
Парсек	$1\,\text{пк} = 206265\,\text{а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16}\,\text{m}$

Данные о Солнце

Радиус	697 000 км
Масса	$1.989 \cdot 10^{30}$ кг
Светимость	$3.88 \cdot 10^{26}$ Вт
Эффективная температура	5800 К
Интегральный поток энергии на расстоянии Земли	1360 Вт/м^2

Данные о Земле

Тропический год	365.24219 суток
Период вращения	23 ч 56 мин 04 с
Наклон экватора к эклиптике (эпоха 2000)	$23°26'21.45''$
Экваториальный радиус	6378.14 км
Масса	$5.974 \cdot 10^{24}$ кг

Данные о Луне

Среднее расстояние от Земли	384400 км
Сидерический период обращения	27.321662 суток
Синодический период обращения	29.530589 суток
Радиус	1738 км
Масса	$7.348 \cdot 10^{22}$ кг (1/81.3 массы Земли)

Данные орбит планет

Планета	Большая полуось (а.е.)	Эксцентриситет	Наклон к эклиптике (градусы)	Период обращения	Синодический период (сут)
Меркурий	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	—
Марс	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5

1. Угловой размер Солнца с Ганимеда

8 баллов

Кузнецов М.В.

Угловой размер Солнца при наблюдении с Земли составляет $31'$, определите каков будет угловой размер Солнца при наблюдении с Ганимеда в угловых минутах?

Решение.

Для решения задачи используем зависимость углового размера объекта от расстояния до наблюдателя:

$$\alpha = 206265" \frac{2R_\odot}{\Delta} = 3438' \frac{2R_\odot}{\Delta}$$

Способ №1. Ганимед это спутник Юпитера, расстояние от Юпитера до Солнца много больше чем от Юпитера до Ганимеда, следовательно можно провести прямой расчет углового размера:

$$\alpha = 3438' \frac{2R_\odot}{a_{Jup}} = 3438' \frac{2 \cdot 6.9 \cdot 10^5}{5.2 \cdot 1.5 \cdot 10^8} \approx 5.8'$$

Способ №2. Ганимед это спутник Юпитера, расстояние от Юпитера до Солнца много больше чем от Юпитера до Ганимеда, следовательно:

$$\frac{\alpha_{Ganymede}}{\alpha_\oplus} = \frac{206265" \frac{2R_\odot}{a_{Jup}}}{206265" \frac{2R_\odot}{a_\oplus}}$$

$$\alpha_{Ganymede} = \alpha_\oplus \times \frac{a_\oplus}{a_{Jup}} = 31'^\circ \times \frac{1}{5.2} \approx 6.0'$$

Округление: Полученное значение округляем до десятых долей минуты: $\alpha_{Ganymede} \approx 6.0'$

Ответ. Угловой размер Солнца при наблюдении с Ганимеда составит примерно $6.0'$ угловых минут.

Критерии оценивания. **8**

Формулу углового размера или обратную зависимость от расстояния 3
Понимание, что Ганимед спутник Юпитера 1
Выбор расстояния до Солнца 5.2 а.е. 1
Получение верного ответа в угловых минутах 3
Верные ответы в секундах. градусах и радианах оцениваются 1

2. Кольцеобразное затмение Солнца у Сатурна 8 баллов

Кузнецов М.В.

На каком минимальном расстоянии от Сатурна должен находиться наблюдатель, чтобы можно было наблюдать кольцеобразное затмение Солнца во время его соединения с Сатурном. Пренебречь полярным сжатием Сатурна. Орбиту Сатурна считать круговой.

Решение.

Для наблюдения кольцеобразного затмения угловой размер Сатурна должен быть меньше углового размера Солнца:

$$\alpha_S < \alpha_\odot$$

где $\alpha_S = \frac{2R_S}{d}$, d — расстояние от наблюдателя до Сатурна.

$$3438' \frac{2R_S}{\Delta} < 3438' \frac{2R_\odot}{a_s + \Delta}$$

$$\frac{a_s + \Delta}{\Delta} < \frac{2R_\odot}{2R_S}$$

$$\frac{a_s}{\Delta} < \frac{2R_\odot}{2R_S} - 1$$

$$\frac{\Delta}{a_s} > \frac{1}{\frac{2R_\odot}{2R_S} - 1}$$

$$\Delta > a_s \frac{1}{\frac{2R_\odot}{2R_S} - 1} > 9.54 \frac{1}{\frac{6.97\times10^5}{58200} - 1} \approx 0.87 \approx 0.9 \text{ а.е.}$$

Ответ. Наблюдатель должен находиться на расстоянии более 0.9 а.е..

Критерии оценивания. **8**

Правильное определение условия кольцеобразного затмения 1

Запись условия и выражения для кольцеобразного затмения 4

Определение минимального расстояния 3

3. Высота Солнца и широта места

16 баллов

Игнатьев В.Б.

В некотором пункте на Земле полуденная высота Солнца в день весеннего равноденствия составляет 71°. Определите на сколько градусов полуденная высота Солнца в этом пункте в день летнего солнцестояния отличается, от дня зимнего солнцестояния. Чему равна широта места наблюдения и склонение Солнца в этот день? Какова будет максимальная полуденная высота в этом месте?

Решение.

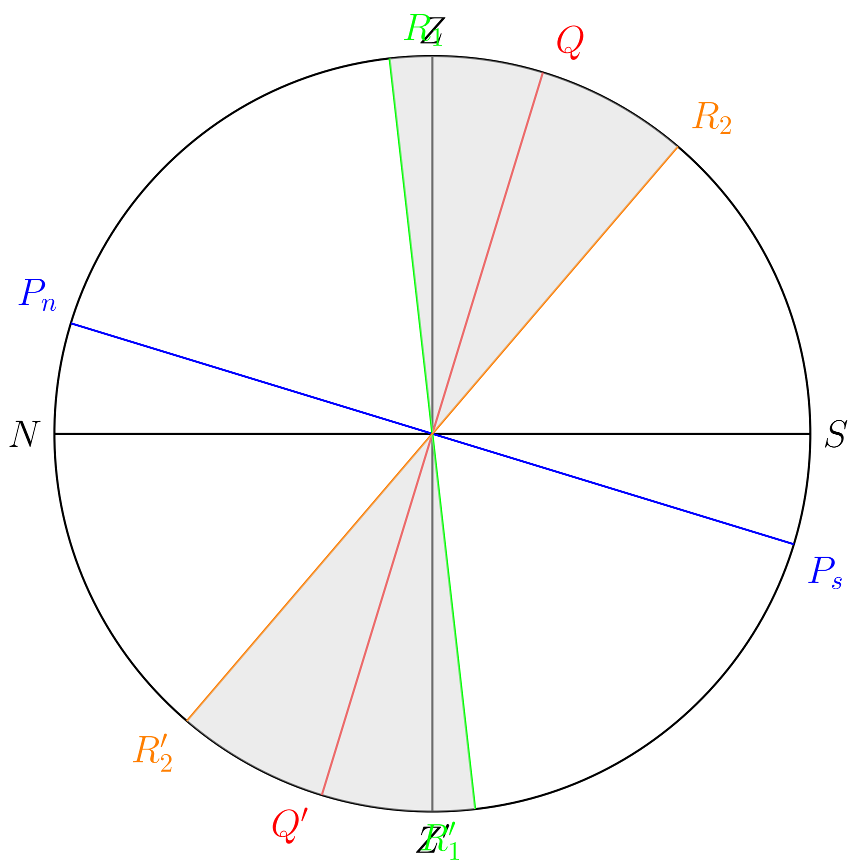


Рис. 1: Схема с небесной сферой.

Для решения задачи нарисуем небесную сферу.

Сначала определим широту места наблюдения. В день весенного равноденствия склонение Солнца равно нулю $\delta_\odot = 0°$, а полуденная высота Солнца составляет 71°. Уточним, что в астрономический полдень происходит верхняя кульминация Солнца.

Тогда используем формулу высоты Солнца в верхней кульминации.

$$h_{\uparrow} = 90^\circ - |\varphi + \delta|$$

где $h_{\uparrow}$ – высота Солнца в верхней кульминации, φ – широта места, δ — склонение Солнца. Здесь важно записать выражение с модулем.

Подставим имеющиеся значения

$$71^\circ = 90^\circ - |\varphi|$$

или

$$\varphi = \pm 19^\circ$$

То есть, значение широты может принимать как положительное, так и отрицательное значение.

Теперь определим полуденные высоты (высоты верхних кульминаций) Солнца для дней зимнего и летнего солнцестояний. Значение склонений Солнца в эти дни

Летнее солнцестояние: $\delta_{summer} = +23.5^\circ$ Зимнее солнцестояние: $\delta_{winter} = -23.5^\circ$

Расчет высот Солнца в солнцестояния:

Летнее солнцестояние:

$$h_{summer} = 90^\circ - |19^\circ - 23.5^\circ| = 85.5^\circ$$

Зимнее солнцестояние:

$$h_{winter} = 90^\circ - |19^\circ + 23.5^\circ| = 47.5^\circ$$

Разность высот:

$$\Delta h = h_{summer} - h_{winter} = 85.5^\circ - 47.5^\circ = 38^\circ$$

Обратим внимание, что разность высот не равна 47°, так как наблюдатель находится между тропиками. В этом случае одна из кульминаций в день солнцестояния происходит к северу от зенита, а вторая к югу от зенита.

Так как широта пункта наблюдений находится между тропиками, то два раза в году Солнце оказывается в зените, т.к. $\delta_{\odot} = \varphi$. Следовательно: $h_{max} = 90^\circ$

Ответ.

- Широта места наблюдения: $\varphi = 19^\circ$ с.ш.

- Разность высот Солнца между летним и зимним солнцестояниями: $\Delta h = 38^\circ$
- Максимальная высота Солнца $h_{max} = 90^\circ$

Критерии оценивания. **16**

Верная запись склонения Солнца в день равноденствия 2
Верное определение широты места . . . . 2×2
Верная запись склонения Солнца в дни солнцестояний . . . . 1×2
Правильный расчет высот в солнцестояния . . . . 2×2
Корректное вычисление разности высот* 2
Верная запись максимального склонения $h_{max} = 90^\circ$ 2

*ответ 47 градусов. Оценивается максимум из 12 баллов. п.4 - 2 балла максимум, п.5 - 0 баллов

4. Изображение двойной системы

16 баллов

Игнатьев В.Б.

Двойная система состоит из двух звезд, удаленных друг от друга на угловое расстояние $10''$ и фотографируется при помощи телескопа с $D = 12$ см и $F = 60$ см и ПЗС-матрицей с размером пиксела 5 мкм. Определите расстояние в пикселях между звездами. Влиянием атмосферы пренебречь.

Решение.

Найдем размер на фокальной плоскости, который занимает расстояние между звездами:

$$\theta = 206265''\frac{d}{F} \to d = F\frac{d}{206265''} = 600\frac{10''}{206265''} \approx 0.02909 \text{ мм} \approx 29.09 \text{ мкм}$$

Расстояние в пикселях:

$$N = \frac{d}{p} = \frac{29.09}{5} \approx 5.8 \text{ пикселя}$$

Ответ. Расстояние между изображениями звезд на ПЗС-матрице составляет примерно 5.8 пикселя.

Критерии оценивания. **16**

Взаимосвязь углового размера и размера на фокальной плоскости 6
Расчет размера расстояния между звездами на фокальной плоскости 4
Правильный расчет расстояния в пикселях 6
Запись выражения 4
Итоговый расчет 2

5. Температура красного гиганта

16 баллов

Игнатьев В.Б.

Оцените температуру красного гиганта, если он имеет светимость в 5000 светимостей Солнца, а радиус равный орбите Земли вокруг Солнца.

Решение. Для решения задачи используем закон Стефана-Больцмана, который связывает светимость звезды с её температурой и радиусом.

Запишем Закон Стефана-Больцмана: Светимость звезды выражается формулой:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

где L — светимость, R — радиус звезды, σ — постоянная Стефана-Больцмана, T — температура.

Исходные данные:

- Светимость красного гиганта: $L_{rg} = 5000 L_\odot$
- Радиус красного гиганта: $R_{rg} = 1$ а.е. $= 1.496 \times 10^{11}$ м
- Светимость Солнца: $L_\odot = 3.828 \times 10^{26}$ Вт
- Радиус Солнца: $R_\odot = 6.957 \times 10^8$ м
- Постоянная Стефана-Больцмана: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$ Вт/м2·К4

Расчет светимости красного гиганта:

$$L_{rg} = 5000 \times 3.828 \times 10^{26} = 1.608 \times 10^{31} \text{ Вт}$$

Способ №1. Расчет температуры из закона Стефана-Больцмана:

$$T_{rg} = \left(\frac{L_{rg}}{4\pi R_{rg}^2 \sigma} \right)^{1/4}$$

$$T_{rg} = \left(\frac{5000 \cdot 3.8 \times 10^{26}}{4 \times 3.1416 \cdot (1.496 \times 10^{11})^2 \cdot 5.670 \times 10^{-8}} \right)^{1/4} \approx 3300K$$

Способ №2. Запишем отношение светимостей красного гиганта и Солнца:

$$\frac{L_{rg}}{L_\odot} = \frac{4\pi R_{rg}^2 \sigma T_{rg}^4}{4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4}$$

$$T_{rg} = T_{\odot} \left(\frac{L_{rg}}{L_{\odot}}\right)^{1/4} \left(\frac{R_{\odot}}{R_{rg}}\right)^{-1/2} = 5800 \left(\frac{5000}{1}\right)^{1/4} \left(\frac{6.9 \times 10^5}{1.5 \times 10^8}\right)^{-1/2} \approx 3300 \text{ K}$$

Ответ. Температура красного гиганта составляет примерно 3300 K.

Критерии оценивания. **16**

Запись закона Стефана-Больцмана 4

Вывод выражения для расчета 6

Итоговый расчет температуры 6

6. Изменение мощности радиосигнала

16 баллов

Игнатьев В.Б.

Космический аппарат имеет орбиту, лежащую в плоскости эклиптики. Полуось орбиты составляет 2.7 а.е., эксцентриситет 0.25. На аппарате установлен радиопередатчик постоянной мощности. Определите, во сколько раз отличается максимальная принимаемая мощность сигнала на Земле от минимальной. Орбиту Земли считать круговой.

Решение.

Для решения задачи необходимо определить минимальное и максимальное расстояние между Землей и космическим аппаратом и учесть обратную квадратичную зависимость мощности сигнала от расстояния.

Определим расстояния от аппарата до Солнца:

- Перигелийное расстояние:

$$q = a(1 - e) = 2.7 \times (1 - 0.25) = 2.7 \times 0.75 = 2.025 \text{ а.е.}$$

- Афелийное расстояние:

$$Q = a(1 + e) = 2.7 \times (1 + 0.25) = 2.7 \times 1.25 = 3.375 \text{ а.е.}$$

Найдем минимальное и максимальное расстояния между Землей и аппаратом:

- Минимальное расстояние: когда аппарат в перигелии и находится между Землей и Солнцем

$$\Delta_{min} = r_{peri} - R_\oplus = 2.025 - 1 = 1.025 \text{ а.е.}$$

- Максимальное расстояние: когда аппарат в афелии и находится за Солнцем для наблюдателя с Земли

$$\Delta_{max} = r_{aph} + R_\oplus = 3.375 + 1 = 4.375 \text{ а.е.}$$

Мощность принимаемого сигнала обратно пропорциональна квадрату расстояния:

$$P \propto \frac{1}{\Delta^2}$$

Определим отношение максимальной мощности к минимальной:

$$\frac{P_{max}}{P_{min}} = \left(\frac{d_{max}}{d_{min}}\right)^2 = \left(\frac{4.375}{1.025}\right)^2 \approx (4.268)^2 \approx 18.21$$

Ответ. Максимальная принимаемая мощность сигнала на Земле может отличаться от минимальной в 18.2 раза.

Критерии оценивания. **16**

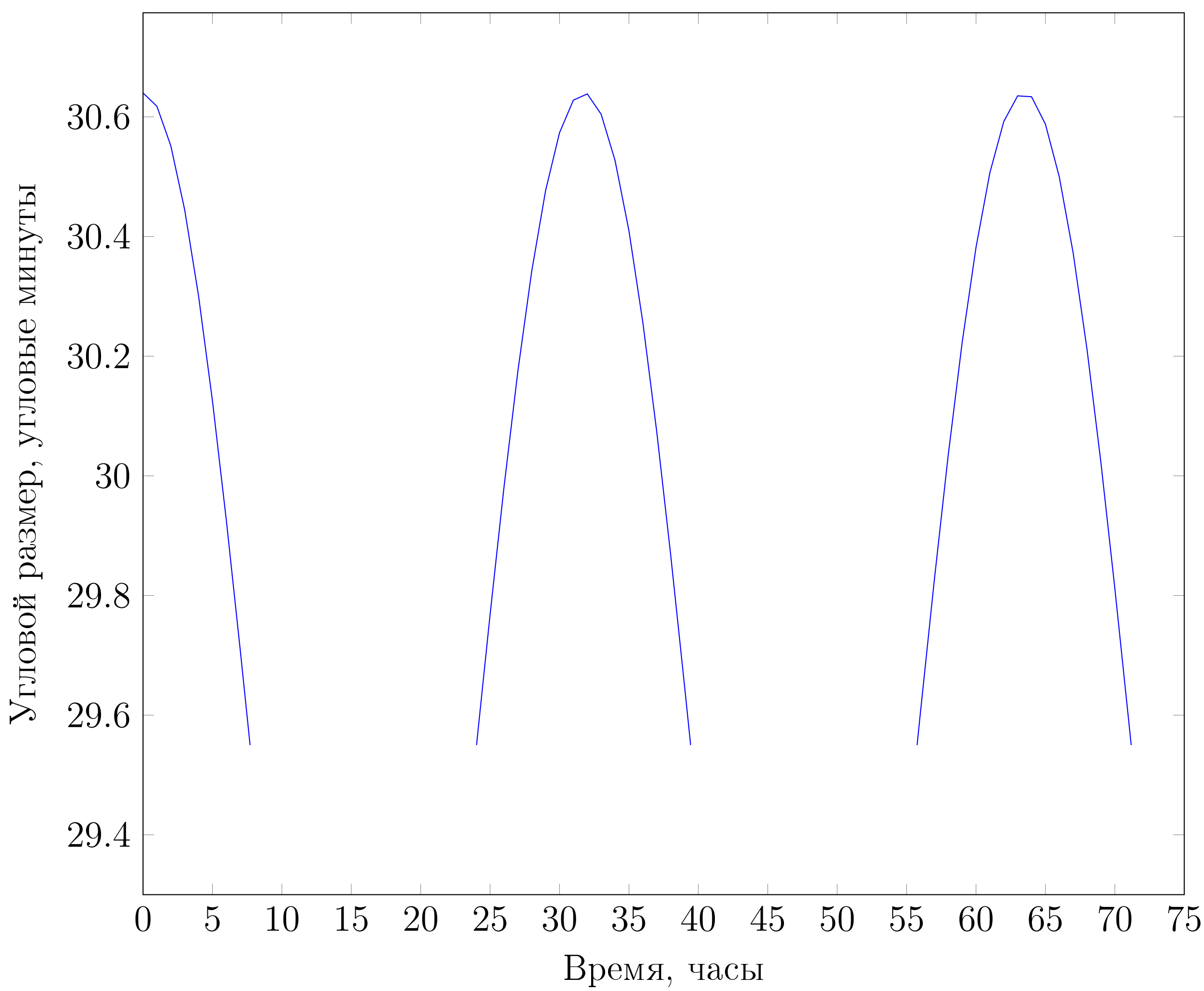
Правильный расчет перигелийного и афелийного расстояний . . . . 2×2
Синхронность 2
Нахождение минимально и максимального расстояния от Земли . . . . 2×2
Формула обратных квадратов 4
Нахождение верного ответа 2
Найден обратный ответ 1

7. Далекая планета

16 баллов

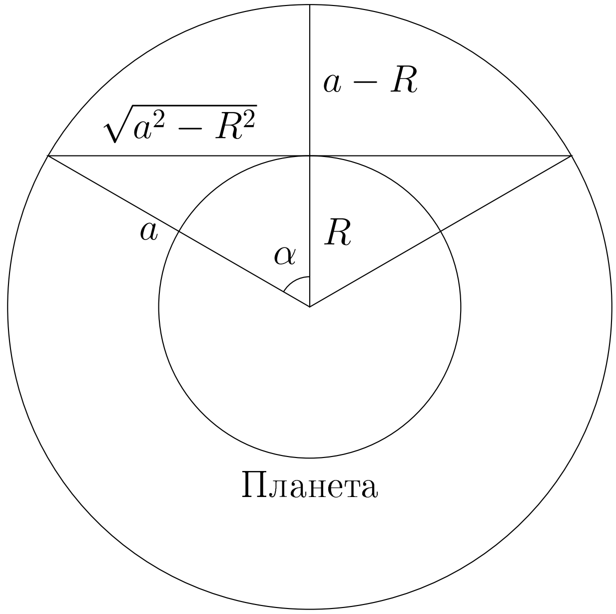
Бирюкова Е.А.

На некоторой далёкой планете ($M = 6.4 \cdot 10^{23}$ кг, $R = 3400$ км) местный астроном, находясь на экваторе, наблюдал за угловым размером спутника, вращающегося вокруг планеты. Сохранившиеся результаты его наблюдения представлены на графике. Определите большую полуось спутника, а также осевой период далёкой планеты. Предположите, какой мог быть радиус спутника. Считайте, что планета лежит в плоскости экватора.



Решение.

Обратим внимание, что угловой размер спутника не только изменяется, но и исчезает вовсе. Поскольку угловой размер — величина наблюдаемая, то для ее измерение необходимо наблюдать спутник. Следовательно в промежутках, где спутник не наблюдается, угловой размер не возможно измерить. Предельная



Орбита спутника

точка, где возможно наблюдение спутника, — это горизонт, а точка, где его угловой размер максимален, — это зенит. Снимем данные с графика, соответствующие этим точкам:

$$\rho_{max} = 30.64', \quad \rho_{min} = 29.55'$$

Расстояние до спутника на горизонте составляет $r_{min} = \sqrt{a^2 - R^2}$, Расстояние до спутника в зените — $r_{max} = a - R$, где a — большая полуось, R — радиус планеты. Определим большую полуось орбиты спутника:

$$\rho = \frac{R_c}{r}$$

$$\frac{\rho_{max}}{\rho_{min}} = \frac{R_c}{r_{max}} \cdot \frac{r_{min}}{R_c} = \frac{r_{min}}{r_{max}} = \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{a - R} = \sqrt{\frac{(a-R)(a+R)}{(a-R)^2}} = \sqrt{\frac{a+R}{a-R}}$$

$$\frac{a+R}{a-R} = \left(\frac{\rho_{max}}{\rho_{min}}\right)^2$$

$$a = R \cdot \frac{1 + \left(\frac{\rho_{max}}{\rho_{min}}\right)^2}{\left(\frac{\rho_{max}}{\rho_{min}}\right)^2 - 1} = 3400 \cdot \frac{1 + \left(\frac{30.64}{29.55}\right)^2}{\left(\frac{30.64}{29.55}\right)^2 - 1} = 93905 \approx \boxed{93900 \text{ км}}$$

Зная расстояние до спутника и его угловой размер, можем определить радиус спутника:

$$\rho = 206265 \cdot \frac{2 \cdot R_c}{r}, \quad R_c = \frac{\rho''_{max} \cdot r_{max}}{2 \cdot 206265} = \frac{30.64 \cdot 60 \cdot (93905 - 3400)}{2 \cdot 206265} = 403 \approx \boxed{400 \text{ км}}$$

Теперь определим осевой период планеты. Для этого снимем с графика время, которое спутник наблюдаем для астронома:

$$t_1 = 24.02 \text{ ч}, \ t_2 = 39.44 \text{ ч}$$

Тогда время, которое спутник находится над горизонтом:

$$t = t_2 - t_1 = 39.44 - 24.02 = 15.42 \text{ ч}$$

За это время спутник проходит угол, равный 2α. Определим его:

$$2\alpha = 2 \cdot \arccos\left(\frac{R}{a}\right) = 2 \cdot \arccos\left(\frac{3400}{93905}\right) = 175.86^\circ$$

Определим период повторений положения спутника на орбите относительно наблюдателя:

$$S = t \cdot \frac{360^\circ}{2\alpha} = 15.42^h \cdot \frac{360^\circ}{175.86^\circ} = 31.56^h$$

Обратим внимание, что время повторения одинаковых положений спутника зависит как от движения спутника, так и от движения наблюдателя, то есть осевого движения планеты, то есть полученное время — это синодический период. Для того, чтобы определить осевой период планеты, необходимо знать сидерический период спутника. Определим его по третьему закону Кеплера:

$$T^2_{\text{год}} \cdot \frac{M}{M_\odot} = a^3_{\text{ае}}$$

$$T = \sqrt{a^3 \cdot \frac{M_\odot}{M}} = \sqrt{\left(\frac{93905}{1.5 \cdot 10^8}\right)^3 \cdot \frac{2 \cdot 10^{30}}{6.4 \cdot 10^{23}}} = 0.027 \text{ года} = 9.97 \text{ дней} = 239.28 \text{ часов}$$

Поскольку нам неизвестно какое вращение у спутника, то будем рассматривать все три возможных случая: движение прямое — $T_{\text{ось}} > T$, $T_{\text{ось}} < T$, движение обратноею

- **1 случай. Движение прямое, $\mathbf{T_{ось}} > \mathbf{T}$.** В этом случае синодический период считается по формуле:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\text{ось}}} - \frac{1}{T}$$

Посчитаем осевой период планеты:

$$T_{\text{ось}} = \frac{S \cdot T}{S + T} = \frac{31.56 \cdot 239.28}{31.56 + 239.28} = \boxed{27.88^h}$$

- **2 случай. Движение прямое, $\mathbf{T_{ось}} < \mathbf{T}$.** В этом случае синодический период считается по формуле:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\text{ось}}}$$

Посчитаем осевой период планеты:

$$T_{\text{ось}} = \frac{S \cdot T}{S - T} = \frac{31.56 \cdot 239.28}{31.56 - 239.28} < 0$$

Поскольку период — величина положительная, то в это случае $\boxed{\text{решения нет}}$.

- **3 случай. Движение обратное.** В этом случае синодический период считается по формуле:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} + \frac{1}{T_{\text{ось}}}$$

Посчитаем осевой период планеты:

$$T_{\text{ось}} = \frac{S \cdot T}{T - S} = \frac{31.56 \cdot 239.28}{239.28 - 31.56} = \boxed{36.35^h}$$

Ответ. $R_c = 806$ км, $a = 93905$ км, $T_{\text{ось-1}} = 27.88^h$, $T_{\text{ось-2}} = 36.35^h$.

Ответ. $R_c = 400$ км, $a = 93900$ км, $T_{\text{ось-1}} = 27.88^h$, $T_{\text{ось-2}} = 36.35^h$.

Критерии оценивания. 20

Снятие макс. и мин. углового размера. с точностью до $0.1'$ .... 1×2

Если точность хуже, то тут баллы не ставятся, но дальнейшее решение оценивается из снятых данных участником

Понимание, что не видимость спутника - заход за горизонт 1

Однозначное обоснование. Баллы ставятся только в том случае, когда это явно прописано в решении.

Определение полуоси спутника 5

Выражение для полуоси 3

Рассчет численного ответа 2

Определение радиуса 2

Снятие времени 2

Прямая запись, что это синодический период 1

Определение орбитального периода по III обобщенному закону Кеплера 3

Рассмотрение всех случаев синодического выражения .... 1×3

Запись окончательного ответа 1