Решения заключительного этапа

Подмосковной олимпиады школьников по экономике

7–8 класс, 2025–2026 учебный год

1. «Задачи детям не игрушка»

На фабрике делают игрушки. Есть два типа сотрудников: A и B. Чтобы собрать и упаковать одну игрушку, любому сотруднику нужно: 2 единицы сырья, 1/2 часа времени и 1/4 единицы упаковочного материала.

Но у сотрудников есть особенности:

- сотрудник A, если выпускает q игрушек, дополнительно тратит $2q$ единиц упаковочного материала на защитные вкладыши;
- сотрудник B, если работает t часов, дополнительно тратит $\frac{t}{2}$ единицы сырья на калибровку оборудования.

Рассмотрите последовательно четыре независимые ситуации. В каждом пункте нужно определить максимально возможный выпуск игрушек при заданных ограничениях по времени работы сотрудника и запасам ресурсов.

(а) (3 балла) На фабрике работает только сотрудник A. Он готов работать сколько угодно долго. Упаковочного материала у фабрики 18 единиц, сырья — неограниченно. Какое наибольшее число игрушек можно выпустить?

(б) (4 балла) На фабрике по-прежнему только сотрудник A, но теперь он может работать не более 2 часов. Упаковочного материала 18 единиц, сырья — неограниченно. Какое наибольшее число игрушек можно выпустить?

(в) (4 балла) Снова только сотрудник A, и он может работать не более 2 часов. Упаковочного материала 18 единиц, а сырья только 2 единицы. Какое наибольшее число игрушек можно выпустить?

(г) (4 балла) Теперь на фабрике только сотрудник B, и он может работать не более 4 часов. Упаковочного материала 6 единиц, сырья 9/2 единицы. Какое наибольшее число игрушек можно выпустить?

Решение:

Пусть q — выпуск игрушек.

Для сотрудника A суммарные затраты на q игрушек:

$$\text{сырье } = 2q, \qquad \text{время } = \frac{q}{2}, \qquad \text{упаковка } = \frac{q}{4} + 2q = \frac{9q}{4}.$$

(а): Здесь ограничивает только упаковочный материал, поэтому достаточно одного неравенства:

$$\frac{9q}{4} \le 18 \quad \Rightarrow \quad q \le 8.$$

Ответ: $q_{\max} = 8$.

(б): Теперь добавляется ограничение по времени, поэтому сравниваем два ограничения и берем более жесткое:

$$\frac{q}{2} \le 2 \quad \Rightarrow \quad q \le 4,$$

$$\frac{9q}{4} \le 18 \quad \Rightarrow \quad q \le 8.$$

Значит
$$q \le \min\{4, 8\} = 4.$$

Ответ: $q_{\max} = 4$.

(в): Теперь нужно учесть все три ресурса. Максимальный выпуск задается самым жестким из ограничений:
$$\frac{q}{2} \le 2 \quad \Rightarrow \quad q \le 4,$$
$$\frac{9q}{4} \le 18 \quad \Rightarrow \quad q \le 8,$$
$$2q \le 2 \quad \Rightarrow \quad q \le 1.$$

Значит
$$q \le \min\{4, 8, 1\} = 1.$$

Ответ: $q_{\max} = 1$.

(г): Обозначим через t фактическое время работы сотрудника B. Тогда выпуск и ресурсы должны удовлетворять ограничениям:
$$t \le 4, \qquad q \le 2t, \qquad \frac{q}{4} \le 6, \qquad 2q + \frac{t}{2} \le \frac{9}{2}.$$

При фиксированном q выгодно брать минимально возможное t, потому что дополнительный расход сырья у B растет с временем. Из условия $q \le 2t$ минимальное допустимое время:
$$t = \frac{q}{2}.$$

Подставим в ограничение по сырью:
$$2q + \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{2} \le \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad 2q + \frac{q}{4} \le \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{9q}{4} \le \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad q \le 2.$$

Проверим достижимость границы:
$$q = 2, \qquad t = \frac{q}{2} = 1.$$
Тогда
$$1 \le 4, \qquad \frac{q}{4} = \frac{1}{2} \le 6, \qquad 2q + \frac{t}{2} = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2},$$
то есть все ограничения выполнены.

Ответ: $q_{\max} = 2$.

Критерии:

(а):

- 1 балл — корректно учтены суммарные затраты упаковки для сотрудника A;
- 1 балл — корректно записано и решено ограничение;
- 1 балл — из правильной логики решения получен верный ответ 8.

(б):

- 1 балл — корректно записано ограничение по времени;
- 1 балл — корректно записано ограничение по упаковке;
- 1 балл — верное сравнение ограничений;
- 1 балл — из правильной логики решения получен верный ответ 4.

(в):

- 1 балл — корректно записано ограничение по времени;
- 1 балл — корректно записано ограничение по упаковке;
- 1 балл — корректно записано ограничение по сырью;
- 1 балл — из правильной логики решения получен верный ответ 1.

(г):

- 1 балл — корректно записаны ограничения для B;
- 1 балл — верно использована идея минимального времени $t = \frac{q}{2}$;
- 1 балл — верно получено ограничение $q \leq 2$;
- 1 балл — проверена достижимость и получен верный ответ 2.

2. «Страхование»

Рассмотрим простую модель страхования риска аварии.

У Саши есть $W = 10$ тыс. руб. и игрушечная машинка. С вероятностью $p = \frac{1}{5}$ происходит авария, и тогда Саша несёт убыток $L = 5$ тыс. руб. на ремонт. С вероятностью $1 - p = \frac{4}{5}$ аварии не происходит, и дополнительных расходов нет.

Маша предлагает Саше страховой контракт. Если авария происходит, Маша выплачивает Саше страховое возмещение $I = 3$ тыс. руб. Если аварии нет, выплата равна нулю. За страховку Саша в любом случае платит страховую премию $q \cdot I$.

Полезность Саши зависит от суммы денег x (в тыс. руб.), оставшейся после всех выплат и расходов:

$$U(x) = 24x - x^2, \quad x \in [0, 12].$$

Саша выбирает действие, максимизирующее ожидаемую полезность:

$$p \cdot U(S_1) + (1 - p) \cdot U(S_2),$$

где S_1 — сумма денег у Саши в случае аварии, а S_2 — сумма денег у Саши, если аварии не произошло.

Если Саша безразличен между вариантами, считайте, что он выбирает страхование. Ниже рассмотрите три независимых пункта, во всех из них считайте $q = \frac{1}{4}$

(а) (4 балла) При фиксированном контракте с $I = 3$ согласится ли Саша купить страховку?

(б) (7 баллов) Теперь величину страхового покрытия $I \geq 0$ выбирает сам Саша. В случае аварии он получает I, а страховая премия по-прежнему равна $q \cdot I$. Какое значение I выберет Саша?

(в) (4 балла) Сравните ожидаемую полезность Саши и ожидаемую прибыль Маши

$$\pi = (q - p)I$$

в пунктах (а) и (б). Объясните, почему каждая из этих величин меняется именно в этом направлении.

Решение:

а) Ожидаемая полезность без страховки:

$$p\,U(W - L) + (1 - p)\,U(W).$$

$$U(5) = 24 \cdot 5 - 25 = 95, \qquad U(10) = 240 - 100 = 140,$$

$$\frac{1}{5} \cdot 95 + \frac{4}{5} \cdot 140 = 19 + 112 = 131.$$

Со страховкой $I = 3$:

$$S_1 = 5 + (1 - \tfrac{1}{4}) \cdot 3 = 5 + \frac{3}{4} \cdot 3 = 7.25, \qquad S_2 = 10 - \frac{1}{4} \cdot 3 = 9.25.$$

$$U(7.25) = 24 \cdot 7.25 - 7.25^2 = 174 - 52.5625 = 121.4375,$$

$$U(9.25) = 24 \cdot 9.25 - 9.25^2 = 222 - 85.5625 = 136.4375.$$

Ожидаемая полезность

$$\frac{1}{5} \cdot 121.4375 + \frac{4}{5} \cdot 136.4375 = 24.2875 + 109.15 = 133.4375.$$

Так как ожидаемая полезность во втором случае больше, Саша купит страховку.

б) При данном I:

$$S_1(I) = 5 + (1-q)I = 5 + \frac{3}{4}I, \qquad S_2(I) = 10 - qI = 10 - \frac{1}{4}I.$$

Ожидаемая полезность:

$$p\,U(S_1(I)) + (1-p)\,U(S_2(I)).$$

$$24\Big(pS_1(I) + (1-p)S_2(I)\Big) - \Big(pS_1(I)^2 + (1-p)S_2(I)^2\Big).$$

Посчитаем среднее богатство:

$$pS_1 + (1-p)S_2 = \frac{1}{5}\Big(5 + \frac{3}{4}I\Big) + \frac{4}{5}\Big(10 - \frac{1}{4}I\Big) = 9 - \frac{I}{20}.$$

Тогда линейная часть:

$$24\Big(9 - \frac{I}{20}\Big) = 216 - \frac{6}{5}I.$$

Квадратичная часть:

$$S_1^2 = \Big(5 + \frac{3}{4}I\Big)^2 = 25 + \frac{15}{2}I + \frac{9}{16}I^2,$$
$$S_2^2 = \Big(10 - \frac{1}{4}I\Big)^2 = 100 - 5I + \frac{1}{16}I^2.$$
$$pS_1^2 + (1-p)S_2^2 = \frac{1}{5}\Big(25 + \frac{15}{2}I + \frac{9}{16}I^2\Big) + \frac{4}{5}\Big(100 - 5I + \frac{1}{16}I^2\Big) =$$
$$= 85 - \frac{5}{2}I + \frac{13}{80}I^2.$$

Итого ожидаемая полезность:

$$\Big(216 - \frac{6}{5}I\Big) - \Big(85 - \frac{5}{2}I + \frac{13}{80}I^2\Big) = 131 + \frac{13}{10}I - \frac{13}{80}I^2.$$

Это парабола ветвями вниз, максимум в вершине:

$$I^* = \frac{-\frac{13}{10}}{2\cdot(-\frac{13}{80})} = 4.$$

в) Ожидаемая полезность Саши в пунктах а) и б):

$$U(I=3) = 131 + \frac{13}{10}\cdot 3 - \frac{13}{80}\cdot 9 = 131 + 3.9 - 1.4625 = 133.4375,$$
$$U(I=4) = 131 + \frac{13}{10}\cdot 4 - \frac{13}{80}\cdot 16 = 131 + 5.2 - 2.6 = 133.6.$$

Значит полезность Саши выше в пункте б)

Прибыль Маши:

$$\pi = (q-p)I = \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big)I = \frac{1}{20}I.$$

$$\pi_a = \frac{1}{20}\cdot 3 = 0.15, \qquad \pi_b = \frac{1}{20}\cdot 4 = 0.2.$$

Значит прибыль Маши в пункте б) выше, чем в пункте а).

Интерпретация. В пункте (б) Саша выбирает I, максимизирующее его ожидаемую полезность, поэтому целевая функция для оптимального $I^* = 4$ превышает значение для фиксированного $I = 3$ из пункта а). Для Маши вероятность аварии p меньше, чем доля платежа в размере страховой выплаты q, поэтому её прибыль возрастает по I.

Критерии:

(а):

- **1 балл** — вычислена ожидаемая полезность без страховки;
- **1 балл** — верно вычислены S_1 и S_2 при наличии страховки;
- **1 балл** — верно вычислена ожидаемая полезность со страховкой;
- **1 балл** — верно сделан вывод о том, что Саша купит страховку

(б):

- **2 балла** — верно вычислены $S_1(I)$ и $S_2(I)$ при наличии страховки;
- **3 балла** — верно записана функция ожидаемой полезности от I;
- **2 балла** — верно найдено $I^* = 4$;

(в):

- **1 балл** — верно посчитаны ожидаемые полезности Саши в пунктах (а) и (б);
- **1 балл** — верно посчитаны ожидаемые прибыли Маши в пунктах (а) и (б);
- **1 балл** — корректная интерпретация направления изменения ожидаемой полезности
- **1 балл** — корректная интерпретация направления изменения прибыли

3. «Кофейный монополист»

Вы — единственный поставщик элитного кофе в городе и продаёте его в двух точках: в модном кафе в центре и в небольшом магазине на окраине.

Спрос в кафе в центре:

$$P_1 = 36 - Q_1.$$

Спрос в магазине на окраине:

$$P_2 = 24 - Q_2.$$

Здесь Q_1 и Q_2 — объёмы продаж в пакетах кофе в кафе и магазине соответственно, а цены P_1, P_2 измеряются в условных единицах за один пакет. Общий объём продаж:

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

Издержки на закупку и доставку:

$$TC = 6Q.$$

Есть техническая особенность поставок в магазин. Кофе привозят коробками только трёх типов: на 4, 10 или 12 пакетов. Поэтому объём продаж в магазине Q_2 должен быть равен сумме размеров выбранных коробок (например, можно поставить $4 + 10 = 14$ пакетов или $12 + 12 = 24$ пакета). Иными словами, в магазине нельзя выбрать произвольный объём: он должен соответствовать доступной комбинации коробок.

В кафе такого ограничения нет: Q_1 может быть любым неотрицательным числом.

Во всех пунктах продаётся ровно объём спроса по установленной цене. Продавать меньше или закупать больше величины спроса нельзя.

(а) (8 баллов) Из-за требований антимонопольной службы вы обязаны устанавливать одинаковую цену в обеих точках. То есть

$$P_1 = P_2 = p.$$

Какую цену p следует установить для максимизации прибыли? Если вам безразлично, то вы выбираете наибольшую цену.

(б) (7 баллов) Теперь ограничения сняты, и вы можете назначать разные цены в кафе и в магазине. Какие цены следует установить для максимизации прибыли?

Решение:

Заметим, что перебором вариантов можно получить, что:

$$Q_2 \in \{0,\ 4,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20,\ \ldots\}.$$

(а): При $P_1 = P_2 = p$ объёмы спроса равны:

$$Q_1 = 36 - p, \quad Q_2 = 24 - p \quad (\text{при } p \leq 24).$$

Совокупный объём $Q = 60 - 2p$. Прибыль:

$$\pi = p \cdot Q - 6Q = (p - 6)(60 - 2p) = 2(p - 6)(30 - p).$$

Без ограничений на Q_2 оптимум достигается при $p^* = 18$, что даёт $Q_2 = 6$. Однако $Q_2 = 6$ **недостижимо** при имеющихся коробках.

Поэтому перебираем допустимые значения Q_2 и соответствующие им цены $p = 24 - Q_2$:

Q_2	p	Q_1	$Q = Q_1 + Q_2$	$\pi = 2(p-6)(30-p)$
0	24	12	12	216
4	20	16	20	**280**
8	16	20	28	**280**
10	14	22	32	256
12	12	24	36	216
14	10	26	40	160

Максимальная прибыль $\pi = 280$ достигается при $p = 20$ и $p = 16$. По условию, при безразличии выбираем наибольшую цену.

Ответ: $p = 20, \quad \pi = 280.$, При этом $Q_1 = 16$, $Q_2 = 4$ (одна коробка на 4 пакета).

(б): Теперь монополист максимизирует прибыль на каждом рынке отдельно. Заметим, что:

$$\pi = (36-Q_1)Q_1+(24-Q_2)Q_2-6(Q_1+Q_2) = (36-Q_1)Q_1-6Q_1+(24-Q_2)Q_2-6Q_2 = \pi_1+\pi_2.$$

То есть можно считать, что монополист максимизирует прибыль отдельно на двух рынках.

Кафе (без ограничений на Q_1):

$$\pi_1 = (36 - Q_1 - 6)Q_1 = (30 - Q_1)Q_1.$$

Это парабола ветвями вниз, оптимум достигается в вершине: $Q_1^* = 15$, то есть $P_1^* = 21$, $\pi_1 = 225$.

Магазин (с ограничением на Q_2):

$$\pi_2 = (24 - Q_2 - 6)Q_2 = (18 - Q_2)Q_2.$$

Это парабола ветвями вниз, оптимум достигается в вершине: $Q_2^* = 9$. Но 9 — нечётное число, а Q_2 должно быть чётным. Проверяем ближайшие допустимые значения:

$$Q_2 = 8: \quad \pi_2 = (18-8)\cdot 8 = 80, \quad P_2 = 16;$$

$$Q_2 = 10: \quad \pi_2 = (18-10)\cdot 10 = 80, \quad P_2 = 14.$$

Прибыль одинакова, при безразличии выбираем большую цену.

Ответ: $P_1 = 21, \quad P_2 = 16, \quad \pi = 225 + 80 = 305.$, при этом $Q_1 = 15$, $Q_2 = 8$ (две коробки по 4 пакета).

Критерии:

(а):

- Верно записана функция прибыли при единой цене — **2 балла**.
- Найден «идеальный» оптимум $p = 18$ и обнаружено, что $Q_2 = 6$ недопустимо — **2 балла**.
- Проведён корректный перебор допустимых значений Q_2 (или p) с учётом ограничения на коробки — **2 балла**.

- Верно полученный ответ $p = 20$, $\pi = 280$ (с учётом правила выбора наибольшей цены) — **2 балла**.

(б):

- Корректная оптимизация на рынке кафе: $Q_1 = 15$, $P_1 = 21$, $\pi_1 = 225$ — **2 балла**.
- Нахождение «идеального» оптимума $Q_2 = 9$ на рынке магазина и указание на его недопустимость — **2 балла**.
- Корректный перебор ближайших допустимых значений $Q_2 = 8$ и $Q_2 = 10$ — **1 балл**.
- Верно полученный итоговый ответ: $P_2 = 16$, суммарная прибыль $\pi = 305$ — **2 балла**.

4. «Город Тамло: задания на экономическое рассуждение»

В городе Тамло проходит школьная ярмарка. На ней присутствует школьных совет, который анализирует поведение потребителей и производителей.

Помогите совету подготовить краткие экономические пояснения по ряду ситуаций. В задаче не требуются вычисления: оцениваются корректность рассуждений, логика и качество примеров.

(а) (6 баллов) На школьной ярмарке продаются фирменные худи.

Школьный совет уверен, что повышение цены на худи приведёт к тому, что объём спроса на них снизится. То есть закон спроса будет выполняться.

Укажите две различные причины, по которым обычно закон спроса выполняется. *Если вы напишете больше двух причин, будут проверены только первые две причины.*

(б) (3 балла) Один из членов совета утверждает: «В отдельных случаях закон спроса может не выполняться».

Приведите один реалистичный пример такой ситуации и объясните экономический механизм, который к этому приводит. *Если вы укажете больше примеров, будет проверен только первый.*

(в) (6 баллов) Учитель рассказал членам совета о том, что существуют два типа экономического роста:

Экстенсивный рост — увеличение выпуска за счёт увеличения количества используемых ресурсов. Например, наняли больше работников, открыли дополнительные цеха, расширили посевные площади, при неизменной или почти неизменной технологии.

Интенсивный рост — увеличение выпуска за счёт более эффективного использования ресурсов. Например, внедрили новое оборудование, улучшили организацию процессов, повысили квалификацию работников, то есть главным образом за счёт роста производительности.

И школьный совет сразу отправился на поиски примеров для каждого типа экономического роста.

Помогите совету. Используя эти определения и примеры как ориентир, приведите:

- один собственный пример экстенсивного роста;
- один собственный пример интенсивного роста.

Для каждого примера кратко поясните, почему он относится именно к данному типу роста. *Если вы укажете больше примеров, будет проверен только первый пример для каждого из типов роста.*

Решение

а) (6 баллов) Обычно закон спроса выполняется по двум причинам.

1) *Эффект замещения:* при росте цены товара по сравнению с альтернативами потребители переключаются на заменители (например, вместо фирменного худи покупают обычную толстовку/свитшот/другой бренд), поэтому величина спроса на подорожавший товар уменьшается.

2) *Эффект дохода:* при росте цены реальная покупательная способность дохода падает; при прочих равных потребитель может позволить себе меньше покупок, в том

числе меньше худи, поэтому величина спроса снижается (для нормальных товаров).

б) (3 балла) Примеры нарушения закона спроса: *товар Веблена (статусный товар).* Если фирменные худи на ярмарке служат признаком статуса (ограниченный выпуск, «только для своих», престиж), то повышение цены может сделать их более желанными для части покупателей, стремящихся подчеркнуть статус. Тогда рост цены повышает воспринимаемую «престижность» и увеличивает спрос со стороны этой группы, поэтому величина спроса может вырасти.

в) (6 баллов) Пример *экстенсивного роста:* школьная мастерская по пошиву худи увеличила выпуск, наняв больше швей и купив дополнительные одинаковые швейные машинки, работая по прежней технологии. Это экстенсивный рост, потому что выпуск вырос за счёт увеличения количества ресурсов (труда и капитала), а не за счёт повышения эффективности.

Пример *интенсивного роста:* та же мастерская внедрила более производительное оборудование и/или стандартизировала процессы (например, улучшила раскрой, ввела поточную организацию, обучила работников), и при том же числе работников и станков стала выпускать больше худи в час. Это интенсивный рост, потому что выпуск вырос главным образом за счёт повышения производительности (эффективности использования ресурсов).

Критерии оценивания

а) (6 баллов) За каждую из двух причин — до **3 баллов**.

За одну причину (3 балла):

- **1 балл** — названа корректная причина (например, эффект замещения / эффект дохода / убывающая предельная полезность в связке с выбором при ограниченном бюджете).
- **2 балл** — дано экономическое и корректное объяснение механизма (почему именно при росте цены величина спроса уменьшается).

Замечания:

- Если указаны две причины, но они по смыслу одинаковые (например, два варианта «денег меньше»), суммарно за них не более **3 баллов**.
- Если причина названа, но механизма нет/ошибочен — до **1 балла** за причину.
- Если написано больше двух причин — проверяются только первые две.

б) (3 балла)

- **1 балл** — приведён реалистичный пример ситуации, где при росте цены величина спроса может расти.
- **2 балла** — корректно объяснён экономический механизм (например, статусный спрос/эффект Веблена; либо другой корректный механизм: ожидание дальнейшего роста цены, «паническая» покупка, спекулятивный спрос на актив и т. п.).

Замечания:

- Если пример есть, но механизм описан бытово без экономического содержания — до **1 балла**.
- Если механизм заявлен, но противоречит примеру или логике спроса — **0 баллов** за механизм.
- Если указано больше одного примера — проверяется только первый.

в) (6 баллов) Оценивается отдельно каждый тип роста: по **3 балла** за экстенсивный и по **3 балла** за интенсивный.

За один пример (3 балла):

- **1 балл** — пример сформулирован корректно и реалистично.
- **1 балл** — пример действительно соответствует заявленному типу роста (экстенсивный: рост ресурсов; интенсивный: рост эффективности/производительности).
- **1 балл** — дано краткое пояснение, почему это именно этот тип (указано, что меняется и что остаётся примерно неизменным).

Замечания:

- Если пример смешанный (одновременно увеличили ресурсы и повысили эффективность) без акцента на главном факторе — **0 баллов** за пример.
- Если дан только пример без пояснения — до **1 балла** за пример.
- Если приведено больше примеров — проверяется только первый пример для каждого типа.