**1. Диффузия (Вергунов А.)**

Тонкая пробирка длиной $L$ частично заполнена водой и расположена вертикально (открытым концом вверх) в камере большого объема. Воздух в камере поддерживается при нулевой относительной влажности и постоянном давлении $p_0$. Вследствие диффузии в пробирке устанавливается линейное изменение концентрации водяного пара с высотой: вблизи поверхности воды пар оказывается насыщенным, при этом $p_н = 0{,}8p_0$, а у верхнего открытого конца пробирки его концентрация в 2 раза меньше. Пробирку сверху закрывают поршнем массой $m = p_0S/g$, который может свободно перемещаться внутри пробирки. Определите, на какой высоте $H$ (от нижнего конца пробирки) будет находиться поршень после установления равновесия. Изменением уровня жидкости в пробирке и ее начальным объемом пренебречь. Температура в камере и пробирке постоянна.

**Возможное решение**

По условию давление пара $p_п$ зависит от высоты, введём парциальное давление сухого воздуха $p_в$, и так как на любой высоте $h < L$ суммарное давление воздуха с паром должно равняться $p_0$:

$p_0 = p_п(h) + p_в(h)$.

Так как давление пара с высотой изменяется линейно, можем найти его среднее значение:

$p_{пср} = (p_н + 0{,}5p_н)/2 = 0{,}75p_н = 0{,}6p_0$.

Тогда среднее давление сухого воздуха в пробирке:

$p_{вср} = p_0 – 0{,}6p_0 = 0{,}4p_0$.

После того, как пробирку закроют поршнем, парциальное давление пара становится одинаковым по всей высоте под поршнем и равным $p_н$.

Поршень уравновешивается, когда:

$$p_{внутри} = p_0 + mg/S$$

А по условию:

$$m = \frac{p_0 S}{g} \Rightarrow \frac{mg}{S} = p_0$$

Т.е.:

$$p_{внутри}=2p_0$$

$$2p_0 = p_н + p_{в2},$$

где $p_{в2}$ – парциальное давление сухого воздуха в пробирке после установления равновесия.

$$p_{в2} = 2p_0 – p_н = 1{,}2p_0$$

Так как после закрытия поршнем количество сухого воздуха не изменяется,

$$p_{в2}H = p_{вср}L.$$

Тогда:

$$H = L/3.$$

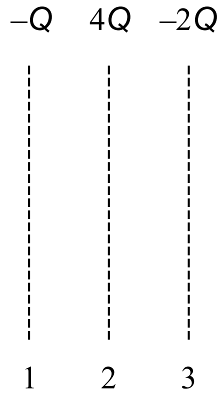
**Критерии оценивания**

| № | Критерий | Балл |
|---|---|---|
| 1. | Запись исходного соотношения для давления в открытой пробирке: $p_0 = p_п(h) + p_в(h)$ | 1 |
| 2 | Правильное определение значения парциального давления пара у верхнего конца пробирки в начальный момент | 1 |
| 3 | Корректное усреднение и нахождение $p_{вср}$ | 2 |
| 4 | Указано, что после установления равновесия в закрытой пробирке пар будет насыщенным | 1 |
| 5 | Найдено новое давление смеси газов $p_{внутри}$ в пробирке | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | Найдено новое парциальное давление $p_{в2}$ сухого воздуха в пробирке | 2 |
| 7 | Верно найдена высота, на которой остановится поршень: $H = L/3$ | 1 |

**Примечание для жюри**
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

**2. Эффект Казимира (Зайцев Р.)**




Три протяженные тонкие металлические сетки 1, 2 и 3, имеющие заряды $q_1 = -Q$, $q_2 = 4Q$ и $q_3 = -2Q$ ($Q > 0$) соответственно, расположены параллельно на равных расстояниях $d_{12} = d_{23} = d$ друг от друга (см. рис.). Площадь каждой из сеток равна $S$ (расстояние $d << \sqrt{S}$).

1) Найдите модуль электрической силы, действующей на среднюю сетку со стороны двух других.
2) Найдите разность потенциалов между первой и второй сетками.
3) Если от первой сетки отделится без начальной скорости электрон, то на какое минимальное расстояние он приблизится к третьей сетке?
4) Найдите модуль электрической силы, действующей на среднюю сетку со стороны двух других при тех же условиях, но $d >> \sqrt{S}$.
5) Получите формулу для модуля силы взаимного притяжения, действующей на единицу площади двух параллельных **незаряженных** сеток 1 и 2 (без третьей сетки) при расстоянии $d \sim 0{,}1$ мкм по эффекту Казимира (квантовые флуктуации вакуума), если модуль силы Казимира, действующей на единицу площади одной сетки со стороны другой, имеет вид $F/S = \alpha \cdot h^x \cdot c^y \cdot d^z$, где $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме, $\alpha$ – некоторая безразмерная постоянная, $x$, $y$ и $z$ – целые числа, которые вам нужно найти.

**Возможное решение.**

1) Согласно принципу суперпозиции, модуль напряжённости поля, созданного сетками 1 и 3 в области между ними, равен:

$$E_{13} = E_3 - E_1 = \frac{2Q - Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}.$$

Тогда, из определения напряжённости:

$$F = 4QE_{13} = \frac{2Q^2}{\varepsilon_0 S}.$$

2) Согласно принципу суперпозиции, модуль напряжённости поля (от всех трех зарядов) между сетками 1 и 2 равен:

$$E_{12} = E_2 + E_1 - E_3 = \frac{3Q}{2\varepsilon_0 S}.$$

Тогда разность потенциалов между первой и второй сетками:

$$U_{12} = -E_{12} d = -\frac{3Qd}{2\varepsilon_0 S}.$$

Знак минус показывает, что потенциал сетки 1 меньше потенциала сетки 2.

3) Работа поля 12 по разгону электрона компенсируется работой поля 23 по остановке электрона на некотором расстоянии от третьей сетки:

$$qU_{12} = -qU_{2X}.$$

Т.к. поле однородно:

$\frac{U_{2X}}{U_{23}} = \frac{l}{d} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{-U_{12}}{U_{23}} d$ , где $l$ – расстояние от второй сетки до места остановки электрона.

$U_{23}$ определяется аналогично $U_{12}$: $U_{23} = E_{23}d = \frac{5Qd}{2\varepsilon_0 S}$.

Тогда искомое расстояние:

$$x = d - l = d\left(1 + \frac{U_{12}}{U_{23}}\right) = 0{,}4d \ .$$

4) При d >> $\sqrt{S}$ сетки можно считать точечными зарядами. Из закона Кулона и принципа суперпозиции: $F = \frac{4Q^2}{d^2\, 4\pi\varepsilon_0}$.

5) Методом анализа размерностей составим равенство:

$\left(\text{кг} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \cdot \text{с}\right)^x \cdot \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^y \cdot \text{м}^z = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\text{с}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}^2}$ .

Решая систему линейных уравнений, полученных из равенства показателей соответствующих степеней для каждой из единиц измерения (кг, м, с), получим модуль силы притяжения Казимира, действующей на единицу площади незаряженных сеток:

$F/S = \alpha \cdot h^1 \cdot c^1 \cdot d^{-4}$ ($x = 1$, $y = 1$, $z = -4$).

**Критерии оценивания**

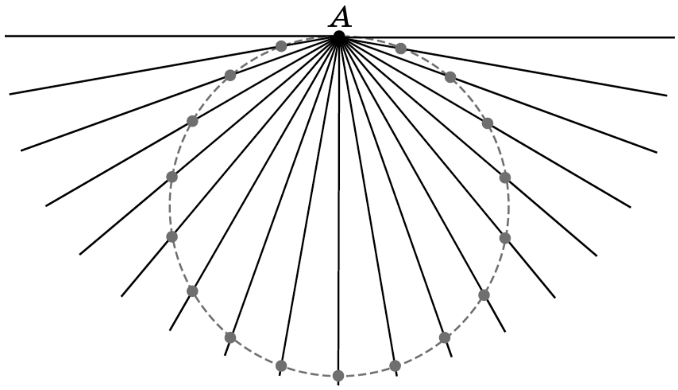
| **№** | **Критерий** | **Баллы** |
|---|---|---|
| **1** | Согласно принципу суперпозиции, модуль напряжённости поля, созданного сетками 1 и 3 в области между ними, равен: $$E_{13} = E_3 - E_1 = \frac{2Q - Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} .$$ | **1** |
| **2** | Модуль электрической силы, действующей на среднюю сетку: $$F = 4QE_{13} = \frac{2Q^2}{\varepsilon_0 S} .$$ | **1** |
| **3** | Согласно принципу суперпозиции, модуль напряжённости поля (от всех трех зарядов) между сетками 1 и 2 равен: $$E_{12} = E_2 + E_1 - E_3 = \frac{3Q}{2\varepsilon_0 S} .$$ | **1** |
| **4** | Разность потенциалов между первой и второй сетками: $$U_{12} = -E_{12}d = -\frac{3Qd}{2\varepsilon_0 S} .$$ Знак минус показывает, что потенциал сетки 1 меньше потенциала сетки 2. | **1** |
| **5** | Работа поля 12 по разгону электрона компенсируется работой поля 23 по остановке электрона на некотором расстоянии от третьей сетки: $$qU_{12} = -qU_{2X} .$$ | **1** |
| **6** | Минимальное расстояние электрона от третьей сетки: $$x = d\left(1 + \frac{U_{12}}{U_{23}}\right) = 0{,}4d$$ | **1** |

| | | |
|---|---|---|
| **7** | При d >> $\sqrt{S}$:<br>$F = \frac{4Q^2}{d^2\,4\pi\varepsilon_0}$ | **2** |
| **8** | Верно составлено равенство<br>$(\text{кг} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \cdot \text{с})^x \cdot \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^y \cdot \text{м}^z = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^2\text{с}^2}$ | **1** |
| **9** | Модуль силы Казимира, действующей на единицу площади незаряженных сеток: F/S= $\alpha \cdot h^1 \cdot c^1 \cdot d^{-4}$ ($x$ = 1, $y$ = 1, $z$ = -4) | **1** |

**Примечание для жюри**
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

**3. Бусинки (Рубцов Д.)**

Множество спиц, выходящих из одной точки $A$, расположены в вертикальной плоскости. Из этой точки одновременно отпускают маленькие бусинки. Каждой спице принадлежит одна бусинка. Определите, как должна зависеть начальная скорость бусинок от угла наклона $\varphi$ спицы к **вертикали**, чтобы через время $\tau$ все бусинки оказались на окружности (см. рисунок) диаметра $g\tau^2/2$. Решите задачу для двух случаев:




1. трения нет;
2. коэффициент трения $\mu$.

**Возможное решение**

В отсутствие трения зависимость ускорения $a$ бусинок от угла $\varphi$: $a(\varphi) = g\cos\varphi$, значит, пройденный бусинкой за время $\tau$ путь: $l(\varphi) = v_0(\varphi)\tau + \frac{g\cos\varphi\tau^2}{2}$. Так как через время $\tau$ все бусинки оказываются на окружности диаметра $g\tau^2/2$, то из геометрии $l(\varphi) = \frac{g\tau^2}{2}\cos\varphi$. Видно, что $v_0(\varphi) = 0$.

Если есть трение, то ускорение $a(\varphi) = g(\cos\varphi - \mu\sin\varphi)$, пройденный путь $l(\varphi) = v_0(\varphi)\tau + \frac{a(\varphi)\tau^2}{2}$ или $l(\varphi) = \frac{g\tau^2}{2}\cos\varphi$. Откуда: (1) $v_0(\varphi) = \frac{g\tau\mu}{2}\sin\varphi$. Заметим, что во время движения бусинка может как ускоряться, так и замедляться – это зависит от соотношения между углом $\varphi$ и коэффициентом трения $\mu$. Значит, (2) некоторые бусинки могли остановиться, доехав до $l(\varphi) = \frac{g\tau^2}{2}\cos\varphi$. Случай (2) – когда бусинка останавливается как раз в нужном месте. Выражение для конечной скорости $v(\varphi) = g\tau(\cos\varphi - \frac{\mu}{2}\sin\varphi)$, откуда следует ограничение для случая (1): $ctg\,\varphi > \frac{\mu}{2}$. Для $ctg\,\varphi < \frac{\mu}{2}$ бусинка должна остановиться до момента времени $\tau$ в нужном месте. Используя формулу тормозного пути $\frac{g\tau^2}{2}\cos\varphi = \frac{v_0^2}{2g(\mu\sin\varphi - \cos\varphi)}$, получим ответ для случая (2): $v_0(\varphi) = g\tau\sqrt{\cos\varphi\,(\mu\sin\varphi - \cos\varphi)}$.

**Ответ:**

Если спицы гладкие, $v_0(\varphi) = 0$

Если нет, то $v_0(\varphi) = \begin{cases} \frac{g\tau\mu}{2}\sin\varphi\,, \text{при } ctg\,\varphi \geq \frac{\mu}{2} \\ g\tau\sqrt{\cos\varphi\,(\mu\sin\varphi - \cos\varphi)}, \text{при } ctg\,\varphi < \frac{\mu}{2} \end{cases}$

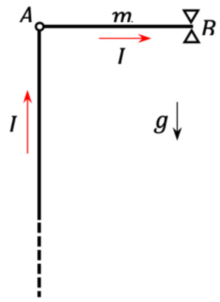
**Критерии оценивания**

| № | Критерий | Балл |
|---|---|---|
| 1 | Записано геометрическое условие: $l(\varphi) = \frac{g\tau^2}{2} cos\ \varphi$ (из диаметра окружности $\frac{g\tau^2}{2}$) | 1 |
| 2 | Для случая без трения записано уравнение движения вдоль спицы: $l(\varphi) = v_0(\varphi)\tau + gcos\ \varphi \cdot \frac{\tau^2}{2}$ | 1 |
| 3 | Для случая без трения получено $v_0(\varphi) = 0$ | 1 |
| 4 | Для случая с трением записано ускорение вдоль спицы: $a(\varphi) = g(cos\varphi - \mu sin\varphi)$ | 1 |
| 5 | Для случая с трением записано уравнение движения: $l(\varphi) = v_0(\varphi)\tau + \frac{a(\varphi)\tau^2}{2}$ | 1 |
| 6 | Для режима без остановки ($a(\varphi) > 0$) получено $v_0(\varphi) = \frac{g\tau\mu}{2} \sin\ \varphi$ | 1 |
| 7 | Определено граничное условие между режимами: $\mathrm{ctg}\varphi = \frac{\mu}{2}$ | 1 |
| 8 | Для режима с остановкой ($a(\varphi) < 0$) записано выражение для тормозного пути: $\frac{g\tau^2}{2}\cos\varphi = \frac{v_0^2}{2g(\mu\sin\varphi - \cos\varphi)}$ | 1 |
| 9 | Для режима с остановкой получено $v_0(\varphi) = g\tau\sqrt{\cos\varphi\,(\mu\sin\varphi - \cos\varphi)}$ | 1 |
| 10 | Итоговый ответ записан в виде кусочно-заданной функции с указанием промежутков | 1 |

**Примечание для жюри**

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

**4. Жёсткий стержень (Клепиков М.)**




Однородный жесткий проводящий стержень состоит из двух частей: первая, вертикальная, полубесконечная и неподвижная, вторая – горизонтальная массой $m$, один из концов которой свободно вставлен в зазор между опорами (точка $B$ на рисунке). Обе части соединены шарнирно в точке $A$. По стержню с помощью невесомых гибких проводников пропускается постоянный ток $I$. Трением в системе пренебречь.

1. Постройте качественный график зависимости проекции силы $F_B$ давления опоры на стержень в точке $B$ от силы тока $I$. Укажите на графике характерные точки.
2. С каким ускорением $a_B$ начнет двигаться точка $B$ стержня если мгновенно убрать опору, не нарушая условия протекания тока?

**Возможное решение**

1. Индукция магнитного поля, созданного вертикальной частью проводника, в точках горизонтального проводника направлена от нас и равна по модулю:

$$B = \frac{1}{2}B_\infty = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{x},$$

где $x$ – расстояние от точки $A$, $B_\infty$ – поле бесконечного прямого проводника с током. Элементарная сила Ампера, действующая на бесконечно малый участок $dx$ провода $AB$, направлена вверх и равна по модулю:

$$dF_A = I \cdot B(x) \cdot dx = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I^2}{x} \cdot dx$$

Умножив последнее выражение на $x$, получим элементарный момент силы Ампера относительно оси вращения, проходящей через точку $A$ перпендикулярно плоскости рисунка:

$$dM_A = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \cdot dx.$$

Проинтегрировав по всей длине $AB$, получим

$$M_A = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \cdot l,$$

где $l$ – неизвестная длина части стержня $AB$.
Уравнение моментов сил относительно выбранной оси:

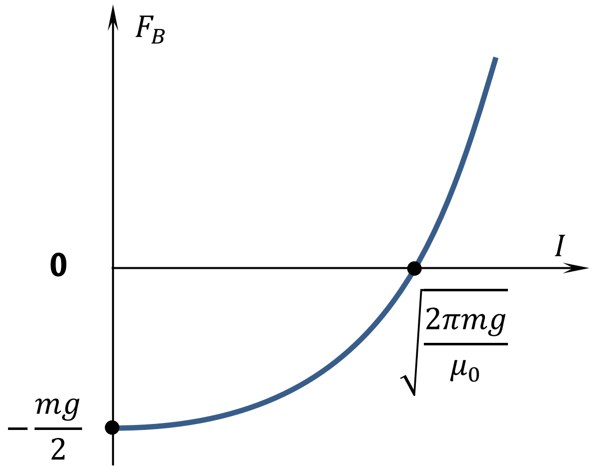
$$M_A - mg \cdot \frac{l}{2} - F_B \cdot l = 0,$$

$$\frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \cdot l - mg \cdot \frac{l}{2} - F_B \cdot l = 0,$$

Откуда получим

$$F_B(I) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} - \frac{mg}{2}.$$

График данной зависимости представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх. Вершина параболы находится в точке $(0, -\frac{mg}{2})$, что соответствует случаю отсутствия тока в системе. Точка пересечения графика с осью абсцисс $\left(\sqrt{\frac{2\pi mg}{\mu_0}}, 0\right)$ соответствует силе тока, при которой стержень не взаимодействует с опорой в точке $B$ (сумма моментов силы тяжести и силы Ампера равна нулю).




2. Для нахождения ускорения точки $B$ запишем основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\sum \vec{M}_i = \vec{\varepsilon} \cdot J,$$

Где $J = \frac{ml^2}{3}$ – момент инерции стержня относительно его конца.

$$\frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \cdot l - mg \cdot \frac{l}{2} = \frac{ml^2}{3} \cdot \varepsilon.$$

Линейное ускорение точки $B$ в начальный момент времени после удаления опоры:

$$a_B = \varepsilon \cdot l,$$

С учетом этого, получим

$$a_B = \frac{3\mu_0 I^2}{4\pi m} - g \cdot \frac{3}{2}.$$

При положительном значении $a_B$ ускорение точки $B$ направлено вверх, при отрицательном – вниз.

**Критерии оценивания**

| **№** | **Критерий** | **Балл** |
|---|---|---|
| 1 | Получена зависимость $B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{x}$. Вывод из закона Био-Савара-Лапласа оценивается так же, как и рассуждение через половину поля бесконечного провода. | 1 |
| 2 | Выражение для момента силы Ампера $M_A = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \cdot l$ | 1 |
| 3 | Правило моментов $M_A - mg \cdot \frac{l}{2} - F_B \cdot l = 0$ | 1 |
| 4 | Получено выражение $F_B(I) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} - \frac{mg}{2}$ | 1 |
| 5 | Построен качественный график<br>• Указано, что график является частью параболы, оси которой направлены вверх<br>• Указаны значения величин в точках пересечения с осями (по 0,5 за каждую) | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | Уравнение динамики вращательного движения $\sum \vec{M}_i = \vec{\varepsilon} \cdot J$ | 1 |
| 7 | Получен или записан момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку $A$ | 1 |
| 8 | Связь линейного ускорения края стержня с угловым ускорением | 1 |
| 9 | Получено выражение $a_B = \frac{3\mu_0 I^2}{4\pi m} - g \cdot \frac{3}{2}$ | 1 |

**Примечание для жюри**

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

**5. Фокус с исчезновением (Жигар А.)**

Точечный источник света находится на главной оптической оси тонкой линзы. При смещении источника вдоль оси на расстояние $L = 40$ см в сторону линзы изображение исчезает.

Если из исходного положения сместить источник в перпендикулярном направлении на такое же расстояние $L$, то поперечное увеличение линзы становится равным 1/3.

1. Какая это линза — собирающая или рассеивающая?
2. На каком расстоянии от линзы находился источник первоначально?
3. Найдите фокусное расстояние линзы.

**Возможное решение**

1. Изображение исчезает только в случае собирающей линзы, когда источник попадает в фокальную плоскость. У рассеивающей линзы изображение мнимое при любом положении источника. Линза собирающая.

2. При смещении вдоль оси на $L = 40$ см источник оказывается в фокусе. Из того, что изображение исчезает только при $d > F$, следует:

$$d - L = F$$

3. При поперечном смещении на $L$ расстояние до линзы остаётся $d$. Поперечное увеличение:

$$\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{1}{3} \Rightarrow f = \frac{d}{3}$$

Для собирающей линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$$

Подставляем:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{3}{d} = \frac{4}{d} \Rightarrow d = 4F$$

Решая систему уравнений:

$$4F - 40 = F \Rightarrow 3F = 40 \Rightarrow F = \frac{40}{3}\text{ см}$$

$$d = 4F = \frac{160}{3}\text{ см}$$

**Критерии оценивания**

| № | Критерий | Балл |
|---|---|---|
| 1 | Правильное определение типа линзы с обоснованием | 1 балл |
| 2 | Запись условия для первого перемещения: $d - L = F$ | 1 балл |
| 3 | Обоснование выбора знака ($d > F$) | 1 балл |
| 4 | Запись условия для поперечного увеличения: Г=1/3 | 1 балл |
| 5 | Связь $f$ и $d$ из увеличения: $f = d/3$ | 1 балл |
| 6 | Правильное применение формулы тонкой линзы | 1 балл |
| 7 | Получение связи $d = 4F$ из формулы линзы | 1 балл |
| 8 | Составление системы уравнений | 1 балл |
| 9 | $F = \frac{40}{3}$ см | 1 балл |
| 10 | $d = \frac{160}{3}$ см | 1 балл |

**Примечание для жюри**

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.