1. На речке (Еськин М.)

От пристани A, находящейся на одном берегу прямой реки шириной $h = 600$ м, отправляется моторная лодка. Лодка относительно воды идёт с постоянной скоростью $u = 5$ м/с и выдерживает курс, строго перпендикулярный берегу. На противоположном берегу прямо напротив пристани A расположена пристань B. Скорость течения реки постоянна, направлена вдоль берега и равна v =2,5 м/с. Одновременно из пункта B вдоль берега, против течения, отправляется катер. Катер движется с постоянной скоростью w =5 м/с относительно берега.

1. Найдите, под каким углом α к линии AB в действительности движется моторная лодка.
2. Чему равно минимальное расстояние $L_{\min}$ между катером и лодкой?
3. Определите, через какое время t после начала движения катер и лодка окажутся на минимальном расстоянии друг от друга.

Возможное решение

1.

Лодка движется вдоль вектора результирующей скорости самой лодки и скорости воды в реке. Поэтому угол α можем определить из треугольника скоростей как:

$$\operatorname{tg} \alpha = v/u. \qquad (1)$$

Откуда угол α = arctg 0.5 = 26, 6°

2.

Метод 1

Для определения минимального расстояния перейдем в систему отсчета катера. Тогда катер в данной системе отсчета покоится, а лодка движется равномерно и прямолинейно. Минимальное расстояния между ними будет достигаться в момент, когда прямая соединяющая катер и лодку будет перпендикулярна прямой, вдоль которой движется лодка. Получается прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна h, катет равен $L_{\min}$, а угол противолежащий этому катеnе назовем β. Угол β определяется аналогично первому пункту, только в этот раз появится дополнительное слагаемое скорость катера:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v+w}{u}, \quad (2)$$

а минимальную длину найдем из прямоугольного треугольника:

$$\sin \beta = L_{min}/h$$

откуда получается ответ:

$$L_{min} = h \sin(\operatorname{arctg}(\frac{v + w}{u})) = 499 \text{ м}$$

Метод 2

Альтернативный способ решения этого пункта через координаты:
расстояние по оси x и y между катером и лодкой:

$$x = (v + w)t$$
$$y = h - ut$$

Тогда расстояние L между лодкой и катером по теореме Пифагора:

$$L^2 = x^2 + y^2 = (v + w)^2 t^2 + (h - ut)^2$$

Это квадратное уравнение относительно времени. Минимум L достигается когда дискриминант равен нулю.

$$((v + w)^2 + u^2)t^2 - 2hut + h^2 - L^2 = 0$$
$$D = 4(hu)^2 - 4((v + w)^2 + u^2)(h^2 - L^2) = 0$$

$$L = h\sqrt{1 - \frac{u^2}{(v+w)^2 + u^2}} = 499 \text{ м}.$$

3.

Метод 1

Для определения времени при решении методом 1 предыдущего пункта достаточно найти перемещение s лодки в системе отсчета катера и разделить его на относительную скорость:

$$s = h\cos\beta$$

$$t = \frac{hu}{(v+w)^2 + u^2} = 36{,}9 \text{ с}$$

Метод 2

Для поиска времени достаточно найти решение квадратного уравнения при дискриминанте равном нулю:

$$t = \frac{hu}{(v+w)^2 + u^2} = 36{,}9 \text{ с}$$

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1.	Идея векторного сложения скоростей	1
2	Формула тангенса угла	1
3	Определен угол α	1
4.1	M1: Идея пересадки в СО катера	1
5.1	M1: Записано $\operatorname{tg}\beta$	1
6.1	M1: Записано $L_{\min} = h\sin\beta$	1
7.1	M1: Получен ответ $L_{\min} = 499$ м	1
4.2	M2: Записаны координаты $x(t)$, $y(t)$	1
5.2	M2: Получено квадратное уравнение относительно t	1
6.2	M2: Сделано утверждение о минимуме L при $D = 0$	1
7.2	M2: Получен ответ $L_{\min} = 499$ м	1
8.1	M1: Пройденный путь до точки максимального сближения $s = h\cos\beta$	1
9.1	M1: Скорость в СО катера $v_{\text{отн}}$	1
10.1	M1: Ответ $t = 36{,}9$ с	1
8.2	M2: Получено выражение для t	2
9.2	M2: Численный ответ $t = 36{,}9$ с	1

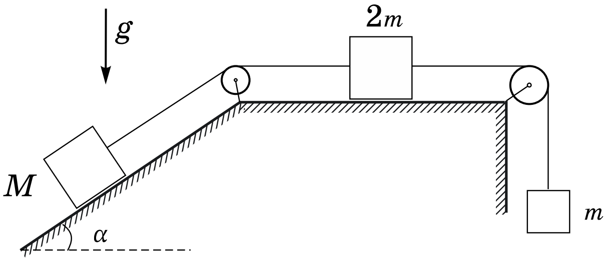
Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

В рамках ответа на один вопрос можно оценивать только по одному методу (либо M1 (метод 1), либо M2 (метод 2)).

2. Три бруска (Киреев А.)

Система, представленная на рисунке, состоит из трёх брусков массами $m = 1$ кг, $2m$ и M, связанных лёгкими нерастяжимыми нитями, перекинутыми через неподвижные лёгкие блоки. Известно, что нити натянуты и брусок массой $2m$ движется влево с ускорением $a_1 = 2{,}5$ м/с^2. Поверхность, вдоль которой движутся бруски, гладкая и состоит из трёх участков – вертикального, горизонтального и участка, наклонённого к горизонту под углом α. Трением в оси блоков можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Определите:

1) силу натяжения T_1 правой нити;

2) силу натяжения T_2 левой нити.

Если бруски массами M и m поменять местами, то брусок массой $2m$ будет двигаться вправо с ускорением $a_2 = 6{,}5$ м/с^2.

Найдите:

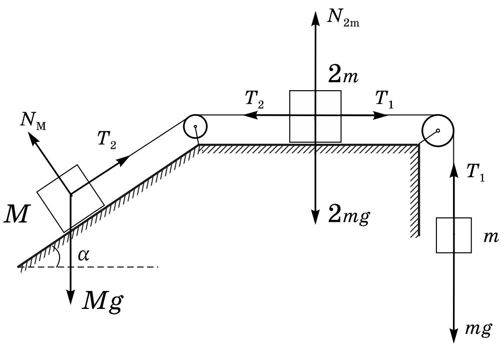
3) массу бруска M;

4) угол α.

Возможное решение

С учётом того, что нити и блоки лёгкие, сила натяжений вдоль них будет постоянна. А так как нити нерастяжимы, то при движении модули ускорений брусков будут одинаковы.

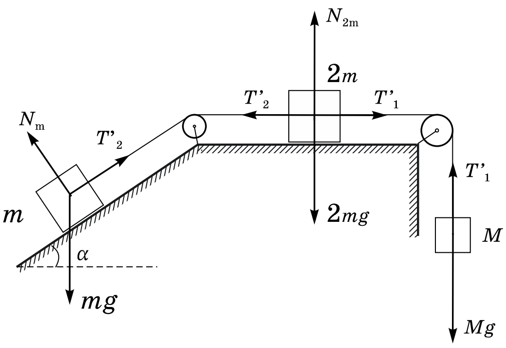
Расставим силы, действующие на бруски (см. рисунок). Согласно второму закону Ньютона для каждого из них:



$$\begin{cases} Mg\sin\alpha - T_2 = Ma_1; & (1) \\ T_2 - T_1 = 2ma_1; & (2) \\ T_1 - mg = ma_1. & (3) \end{cases}$$

Откуда находим $T_1 = m(g + a_1) = 12{,}5$ Н и $T_2 = m(g + 3a_1) = 17{,}5$ Н.

Рассмотрим случай, когда бруски массами M и m поменяли местами. Расставим силы на бруски (см. рисунок). Согласно второму закону Ньютона для каждого из них:



$$\begin{cases} T_2' - mg\sin\alpha = ma_2; & (4) \\ T_1' - T_2' = 2ma_2; & (5) \\ Mg - T_1' = Ma_2. & (6) \end{cases}$$

Сложим уравнения (1), (2) и (3):

$$Mg\sin\alpha - mg = (M + 3m)a_1 \qquad (7)$$

Сложим уравнения (4), (5) и (6):

$Mg - mg\sin\alpha = (M + 3m)a_2$ (8)

Из уравнений (7) и (8) приходим к квадратному уравнению относительно $\sin\alpha$:
$g\sin^2\alpha + (3a_2 - a_1)\sin\alpha + (a_2 - 3a_1 - g) = 0$ или $10\sin^2\alpha + 17\sin\alpha - 11 = 0$. Данное уравнение имеет корни 0,5 и 2,2. Подходит только корень $\sin\alpha = 0{,}5$ или $\alpha = 30°$.

Аналогично из уравнений (7) и (8) можно получить квадратное уравнение относительно M: $(g - a_2)M^2 - (3a_2 + a_1)mM - (3a_1 + g)m^2 = 0$ или $7M^2 - 44mM - 35m^2 = 0$. Данное уравнение имеет корни $7m$ и $-5m/7$, из которых подходит только $M = 7m = 7$ кг.

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Записано соотношение $Mg\sin\alpha - T_2 = Ma_1$ или эквивалентное	1
2	Записано соотношение $T_2 - T_1 = 2ma_1$ или эквивалентное	0,5
3	Записано соотношение $T_1 - mg = ma_1$ или эквивалентное	0,5
4	Записано соотношение $T_2' - mg\sin\alpha = ma_2$ или эквивалентное	1
5	Записано соотношение $T_1' - T_2' = 2ma_2$ или эквивалентное	0,5
6	Записано соотношение $Mg - T_1' = Ma_2$ или эквивалентное	0,5
7	Получен ответ $T_1 = 12{,}5$ Н	1
8	Получен ответ $T_2 = 17{,}5$ Н	1
9	Получено квадратное уравнение относительно $\sin\alpha$ или M	1
10	Выбран правильный корень полученного квадратного уравнения	1
11	Получен ответ $M = 7$ кг	1
12	Получен ответ $\alpha = 30°$	1

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

3. **Горе от ума (Сушков З.)**

Два длинных стержня жестко соединены концами под прямым углом. На каждый стержень надето по одному кольцу, которые могут свободно перемещаться вдоль стержней. К кольцам прикреплена пружина жёсткостью k = 10 Н/м, соединяющая кольца между собой. В момент $t = 0$ кольца находятся в точке соединения стержней; затем их начинают двигать вдоль стержней в противоположные стороны с постоянными скоростями v_1 и v_2. Известно, что модули скоростей относятся как $v_1 : v_2 = 3 : 4$.

Через t_1 = 6 с после начала движения модуль силы упругости пружины равен F_1 = 30 Н, а через t_2 = 14 с модуль силы упругости равен F_2 = 10 Н.

Найдите:

1. длину l_0 пружины в недеформированном состоянии;
2. скорость v_1;
3. скорость v_2.

Возможное решение

Пусть одно кольцо движется по одному стержню со скоростью $v_1 = 3v$, а второе — по другому стержню со скоростью $v_2 = 4v$. За время τ первое кольцо смещается на расстояние $y = v_1\tau = 3v\tau$, а второе — на расстояние $x = v_2\tau = 4v\tau$.

Так как стержни расположены перпендикулярно, расстояние между кольцами, то есть длина пружины, определяется по теореме Пифагора:

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3v\tau)^2 + (4v\tau)^2} = 5v\tau.$$

По закону Гука сила упругости равна

$$F = k\,\Delta l,$$

где $\Delta l\ = l - l_0$ — изменение длины пружины относительно её недеформированного состояния.

Так как из условия используются модули силы, запишем:

$$\mid F(\tau) \mid = k\ \mid l - l_0 \mid = k\ \mid 5v\tau - l_0 \mid.$$

Эта функция является кусочно-линейной:

$$|F(\tau)| = \begin{cases} k(l_0 - 5v\tau), & l < l_0 \\ k(5v\tau - l), & l > l_0 \end{cases}$$

Рассмотрим точки, заданные по условию задачи:

$$(\tau_1 = 6\ с,\ F_1 = 30\ \text{Н}), (\tau_2 = 14\ с,\ F_2 = 10\ \text{Н}$$

Из вида функции видно, что возможно два случая:

- обе точки принадлежат левому линейному участку;
- точки лежат на разных линейных участках.

Рассмотрим эти варианты.

1) $\mid F \mid = k(l_0 - 5v\tau)$

Угловой коэффициент прямой на графике равен:

$$k_{\text{угл}} = \frac{10 - 30}{14 - 6} = -\frac{20}{8} = -2{,}5\ \text{Н/с}.$$

Сравнивая с наклоном теоретической зависимости:

$$k_{\text{угл}} = -5kv,$$

получаем $v = 0.05$ м/с.

Тогда скорости колец:

$$v_1 = 3v = 0.15\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$v_2 = 4v = 0.20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$

Момент, когда пружина была недеформирована, определяется из условия

$$5v\tau = l_0$$

Подставим момент пересечения графика с осью ($|F|$=0), который для данной прямой равен $\tau = 18$ с:

$$l_0 = 5v\tau = 5 \cdot 0.05 \cdot 18 = 4.5\ \text{м}.$$

2) Аналогично рассматривая второй случай, получим:

$$v = \frac{0.10\ \text{м}}{\text{с}},\ v_1 = \frac{0.30\ \text{м}}{\text{с}},\ v_2 = \frac{0.40\ \text{м}}{\text{с}},\ l_0 = 6\ \text{м}.$$

График для первого случая:

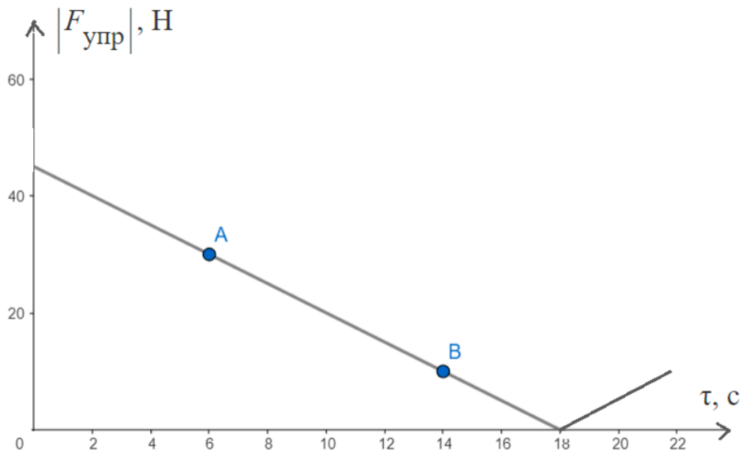
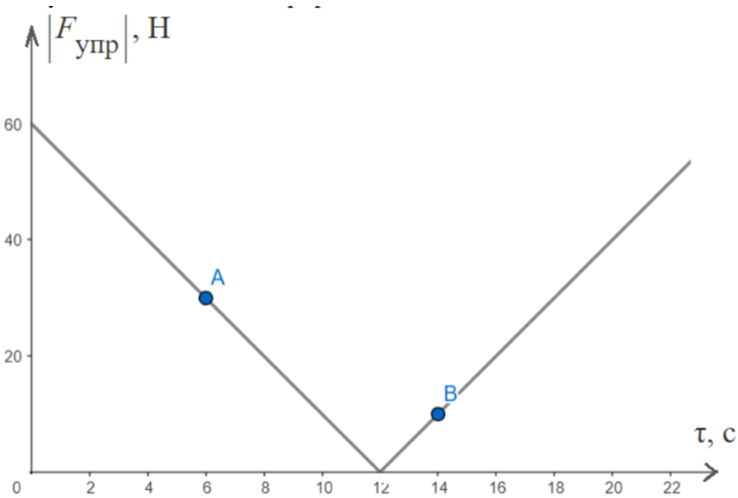


График для второго случая:



Критерии оценивания

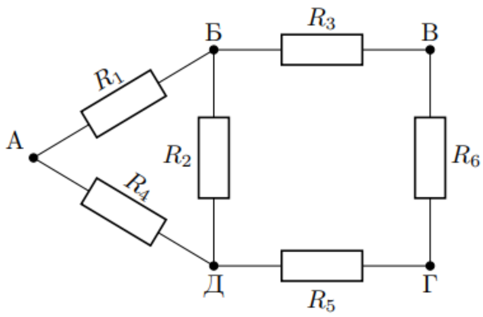
№	Критерий	Балл
1	Получена зависимость $l = 5v\tau$	1
2	Записан закон Гука	1
3	Получена формула $F = k\lvert 5v\tau - l_0\rvert$	1
4	Рассмотрено 2 случая момента отсутствия деформации у пружины	1
5	Верная формула для v_1 и v_2	1
6	Верная формула для l_0	1
7	Получено верное значение v_1 и v_2 для двух случаев	2
8	Получено верное значение l_0 для обоих случаев	2

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

4. Треугольники (Рубцов Д.)

В электрической схеме, изображенной на рисунке, известны два сопротивления резисторов ($R_1 = 6$ Ом и $R_3 = 12$ МОм) и некоторые значения эквивалентных сопротивлений между двумя контактами ($R_{АД} = 8$ Ом, $R_{БД} = 9$ Ом, $R_{ГД} = 5$ МОм, $R_{ВГ} = 9$ МОм). Определите значения сопротивлений $R_2, R_4, R_5, R_6, R_{АБ}, R_{БВ}$. Достаточно получить численные ответы.



Возможное решение

Из правила параллельного соединения резисторов, $R_6 > R_{ВГ}$ и $R_5 > R_{ГД}$, то есть резисторы R_6, R_5, R_3 имеют сопротивления порядка нескольких мегаом. Это значительно больше, чем сопротивление резистора $R_1 = 6$ Ом. То есть относительно R_1 резисторы R_6, R_5, R_3 имеют почти бесконечное сопротивление и их можно рассматривать как разрыв цепи.

Предположим, что $R_2 \gg R_1$. Тогда $R_{БД} = R_1 + R_4$ и $R_4 = R_{БД} - R_1 = 3$ Ом. Тогда $R_{АД} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} = 2$ Ом $\neq 8$ Ом. Получили противоречие. Аналогично можно доказать, что предположение $R_4 \gg R_1$ неверно. То есть сопротивления R_1, R_2, R_4 сравнимы и составляют порядка нескольких ом.

Рассмотрим треугольник АБД (решаем в Омах):

$$\frac{1}{R_{АД}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1 + R_2} \leftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{6 + R_2}$$

$$\frac{1}{R_{БД}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_4} \leftrightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{6 + R_4}$$

Подбором (или честным решением системы уравнений) найдем:

$$R_2 = 18 \text{ Ом}$$
$$R_4 = 12 \text{ Ом}$$

Тогда $R_{АБ} = \frac{(R_2 + R_4) R_1}{R_1 + R_2 + R_4} = 5$ Ом.

Сопротивления R_1, R_2, R_4 гораздо меньше, чем сопротивления R_6, R_5, R_3, так что будем считать их перемычками. Тогда R_6, R_5, R_3 также образуют треугольник В(Б-Д)Г. Нетрудно видеть, что треугольник В(Б-Д)Г отличается от треугольника АБД лишь кратностью сопротивлений в миллион раз. Тогда

$$R_5 = 6 \text{ МОМ}, R_6 = 18 \text{ МОМ}, R_{БВ} = 8 \text{ МОМ}$$

Критерии оценивания

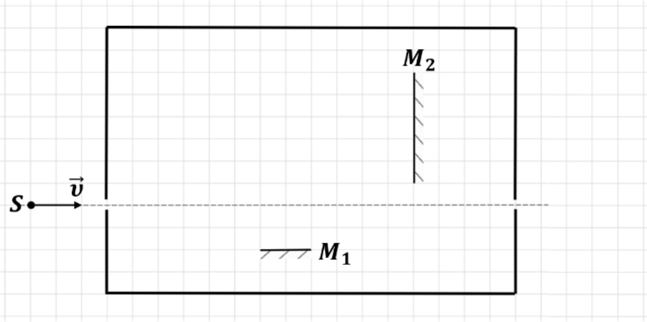
№	**Критерий**	**Балл**
1	Доказано, что резисторы R_6, R_5, R_3 имеют сопротивления порядка нескольких **мегаом**	1
2	Доказано, что сопротивления R_1, R_2, R_4 имеют сопротивления порядка нескольких **Ом**	2

3	Записана система уравнений для нахождения сопротивлений в каждом из треугольников (либо в одном треугольнике, но замечена аналогия двух треугольников)	3
4	Найдены R_2, R_4, R_5, R_6	4 (по 0.5 балла)
5	Найдены $R_{АБ}, R_{БВ}$	2 (по 1 баллу)

Примечание для жюри
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

5. Чёрная коробка(Сеитов А.)

Точечный источник света S движется равномерно и прямолинейно со скоростью 5 см/с вдоль оси, показанной на рисунке пунктиром. Ось проходит через два небольших отверстия в коробке с чёрными стенками. Размер коробки вдоль оси 80 см (рисунок выполнен в масштабе: 1 клетка – 5 см). В коробке закреплены два плоских зеркала M_1 и M_2.



1) В течение какого времени в зеркалах можно наблюдать только одно изображение источника света?

2) В течение какого времени в зеркалах можно наблюдать два изображения источника света?

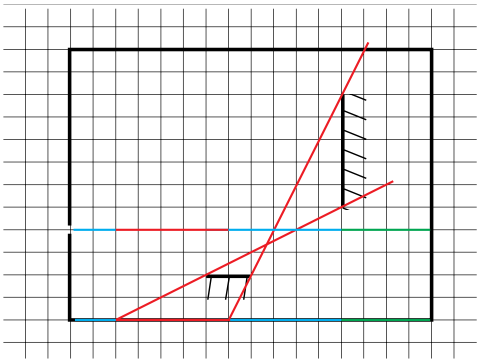
3) В течение какого времени в зеркалах можно наблюдать три изображения источника света?

4) В течение какого времени в зеркалах можно наблюдать четыре изображения источника света?

5) Покажите построением на рисунке область, из которой будут видны все изображения источника света через 4 с от момента прохождения источником света первого (левого) отверстия.

Возможное решение

До момента попадания точечного источника света внутрь коробки изображений в зеркалах нет.



Одно изображение (в зеркале M_1) можно наблюдать только после ухода источника света за зеркало M_2. На рисунке соответствующий участок траектории промаркирован зелёным цветом.

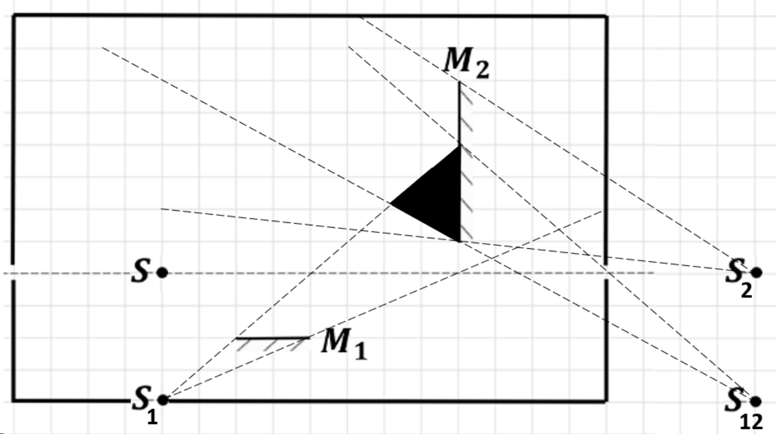
Два изображения источника (одно в M1 и одно в M2) будут наблюдаться при движении по участкам траектории промаркированным синим цветом. В этом случае лучи от изображения, получаемого в M1 не могут попасть на M2, и соответственно дать третье изображение.

Область траектории, при движении по которой будет получаться три изображения промаркирована красным цветом. Изображение источника получаемое в M1 будет создавать вторичное изображение в M2.

Используя указанный в условии масштаб получим времена:

1. t_1 = 4 с;
2. t_2 = 7 с;
3. t_3 = 5 с;
4. t_4 = 0 с.

Критерии оценивания

№	**Критерий**	**Балл**
1	Указано, что одно изображение в зеркале M_1 после ухода источника света за зеркало M_2	1 балл
	4 с	1 балл
2	7 с	2 балла
3	5 с	2 балла
4	0 с	2 балла
5		2 балла

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.