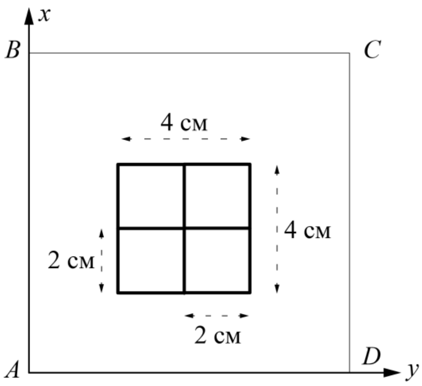
1. Непрямой путь (Кутелев К.)

Печатающая головка 3D-принтера может перемещаться внутри квадратной рабочей области $ABCD$ со стороной $L = 10$ см. Кажущееся непрерывным равномерное движение является последовательностью маленьких шагов длиной $l = 0{,}1$ мм, что является размером пикселя принтера. За раз головка может смещаться **либо** на один шаг вдоль стороны AB (ось x), **либо** на один шаг вдоль стороны AD (ось y). Малость шагов создаёт иллюзию, что головка перемещается с постоянной скоростью $\upsilon = 10$ мм/с. Если во время перемещения происходит ещё и печать, то скорость движения уменьшается в 5 раз.



Определите:

1) за какое минимальное время t_{AC} головка может переместиться из точки A в точку C рабочей области;

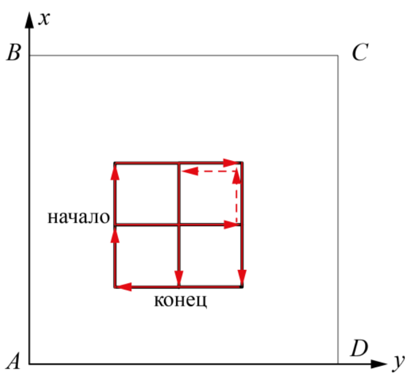
2) за какое минимальное время t_0 головка принтера сможет пройти через все пиксели рабочей области.

3) За какой минимальный интервал времени принтер сможет выполнить работу по изготовлению «окошка», показанного на рисунке. Укажите траекторию движения головки принтера вдоль «окошка». Толщина линии «окошка» 1 пиксель, внутри окошка ничего нет.

Возможное решение

1) Перемещение по осям может происходить только поочерёдно, значит минимальный путь между точками A и C равен $2L$: $t_{AC} = \frac{2L}{\upsilon} = 20$ с.

2) Вдоль одной стороны рабочей области помещается $N = L/l = 1000$ пикселей, значит всего их на рабочей поверхности $N^2 = 10^6$. На проход одного пикселя тратится $t_1 = \frac{l}{\upsilon} = 0{,}01$ с. Все пиксели можно обойти последовательно, значит минимальной время $t_0 = \frac{l}{\upsilon}N^2 = 10^4$ с.



3) Общая длина контура, который нужно пропечатать $L_0 = 24$ см. Но пройти этот контур «не отрывая пера» не получится, придётся дополнительно перемещаться минимум на $L_1 = 4$ см (см. Рис.).

$$t_x = \frac{L_0}{\upsilon/5} + \frac{L_1}{\upsilon} = 120 + 4 = 124 \text{ с.}$$

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1.1	Использован закон для равномерного движения	1
1.2	Путь между точками A и C равен $2L$	1
1.3	$t_{AC} = 20$ с	1
2.1	Верно найдено время прохождения одного пикселя или одной стороны (возможно в неявном виде)	1
2.2	Верно найдено время $t_0 = 10^4$ с	1
3.1	Найдена длина контура $L_0 = 24$ см	1

3.2	Указано, что необходимо дополнительное перемещение между узлами	1
3.3	Найдено минимальное необходимое перемещение L_1 = 4 см	1
3.4	Найдено время t_x = 124 с	2

Примечание для жюри
Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

2. Огород (Рубцов Д.)

Для полива грядки длиной $L = 5$ м и шириной $h = 50$ см наклоненную лейку перемещают над грядкой со скоростью $v = 15\,\frac{\text{м}}{\text{мин}}$. Рассеиватель лейки распространяет воду на всю ширину грядки почти равномерно, при этом вода из носика лейки площадью $S = 10\text{ см}^2$ попадает в рассеиватель со скоростью $u = 0{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Плотность воды $\rho = 1\,\frac{\text{кг}}{\text{л}}$.

1. Чему равен массовый расход воды из лейки μ? (в кг/с)
2. Какая масса воды попадает на квадратный метр грядки?
3. Каков объем лейки V_0 (в литрах), если воды хватает ровно на одну грядку.

Возможное решение

1) За время τ через шланг лейки проходит столб воды высотой $u\tau$. Масса этого столба $m = u\tau S\rho$. Тогда массовый расход лейки $\mu = \frac{m}{\tau} = \rho u S = 0{,}5\,\frac{\text{кг}}{\text{с}}$.
2) За время τ лейка поливает часть грядки длиной $v\tau$. Площадь этого куска грядки $hv\tau$, а масса воды, политая на этот участок грядки $\mu\tau$. Тогда масса воды попадающая на единицу площади: $\sigma = \frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{\mu\tau}{hv\tau} = \frac{\rho u S}{hv} = 4\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$
   На один квадратный метр попадает 4 кг воды.
3) Полная масса воды, затраченная на полив грядки σhl. Тогда объем лейки $V_0 = \frac{\sigma hl}{\rho} = \frac{uSl}{v} = 10\text{ л}$

Критерии оценивания

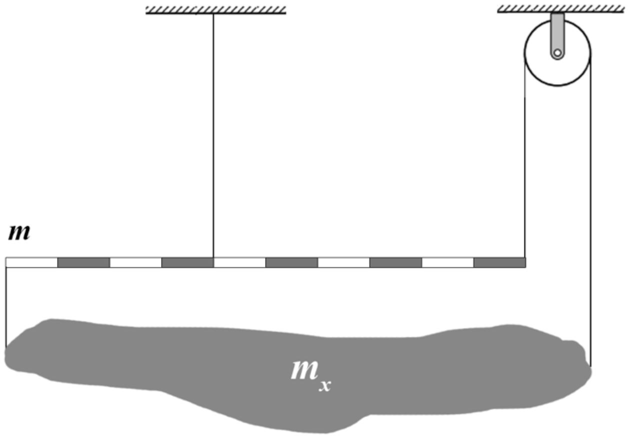
№	Критерий	Балл
1	Правильное выражение для массы воды в шланге лейки $m = u\tau S\rho$	1
2	Найден массовый расход лейки $\mu = \rho u S = 0{,}5\,\frac{\text{кг}}{\text{с}}$	2
3	Записана формула для площади поливаемой грядки $hv\tau$	1
4	Найдена масса, затраченная на полив части площади	1
5	Найдена масса которая попадает на один квадратный метр грядки	2
6	Полная масса воды, затраченная на полив грядки	1
7	Объём лейки	2

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

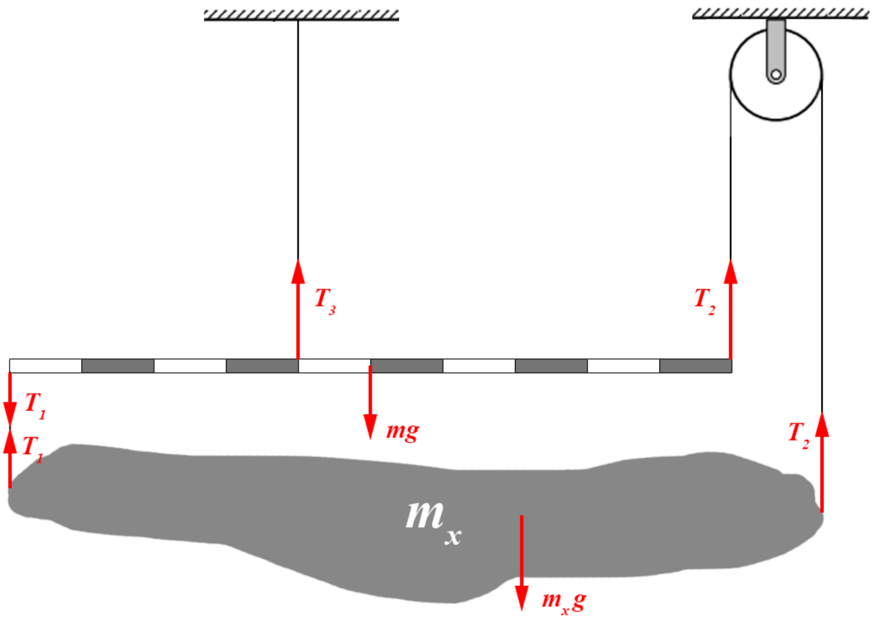
3. Неоднородное тело (Евсеев А.)

Система, состоящая из однородной балки массой m, невесомых нитей и блока, а также неоднородного тела находится в состоянии равновесия (см. рисунок). Балка при этом горизонтальна. Определите, при какой массе m_x неоднородного тела возможно равновесие.



Возможное решение

Расставим силы на балку и неизвестное тело. Важно! Поскольку нам неизвестно положение центра масс неоднородного тела, точка приложения силы $m_x g$ может находиться и в другом месте.



Единственное условие равновесия для неоднородного тела, которое мы можем записать с уверенностью:

$$T_1 + T_2 = m_x g$$

Выразим отсюда T_1:

$$T_1 = m_x g - T_2$$

Теперь запишем связь между T_1 и T_2 через правило моментов для балки:

$$4T_1 \cdot l + 6T_2 \cdot l = mg \cdot l$$

$$4T_1 + 6T_2 = mg$$

Здесь l – это длина единичного отрезка балки, которая, согласно рисунку, состоит из 10 таких одинаковых отрезков.
Тогда:

$$4(m_x g - T_2) + 6T_2 = mg$$
$$T_2 = \frac{1}{2}mg - 2m_x g$$
$$T_1 = 3m_x g - \frac{1}{2}mg$$

Условия, при которых равновесие является теоретически возможным, определяются неотрицательными значениями натяжения нитей. При этом натяжение третьей нити, которая соединяет балку с потолком, обнуляться в принципе не может. Это не сложно заметить, если попробовать записать правило моментов на балку относительно оси, проходящей через ее правый конец. Откуда:

$$\frac{1}{2}mg - 2m_x g \geq 0$$
$$3m_x g - \frac{1}{2}mg \geq 0$$

Откуда:

$$\frac{1}{4}m \geq m_x \geq \frac{1}{6}m$$

То есть, в зависимости от расположения центра тяжести неоднородного тела, равновесие системы будет достигаться при разных его массах.

Критерии оценивания

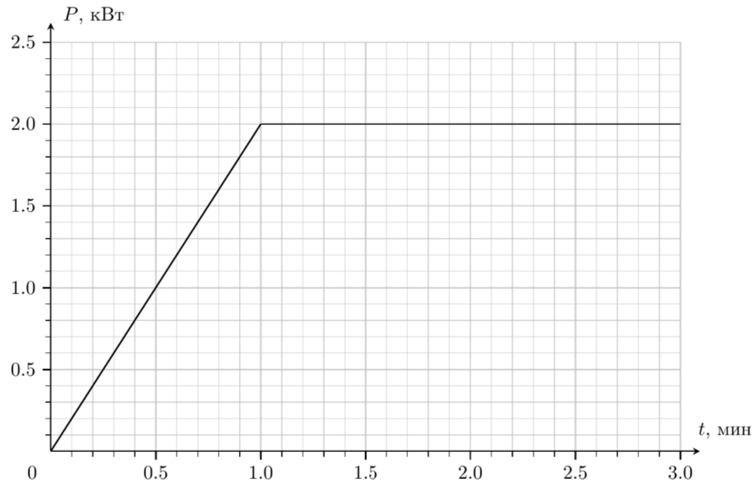
№	**Критерий**	**Балл**
1	Правильно расставлены силы на балку и неоднородное тело	2
2	Записано условие равновесия: $T_1 + T_2 = m_x g$	1
3	Записано правило моментов для балки: $4T_1 \cdot l + 6T_2 \cdot l = mg \cdot l$ или аналогичное выражение	2
4	$T_1 = 3m_x g - \frac{1}{2}mg$	1
5	$T_2 = \frac{1}{2}mg - 2m_x g$	1
6	Условия не отрицательности натяжений нитей	1
7	$\frac{1}{4}m \geq m_x$	1
8	$m_x \geq \frac{1}{6}m$	1

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.

4. Нагревательный элемент (Борисов М.)

В калориметр налили 2 л воды температурой $t_0 = 20\ ^\circ\text{C}$ и поместили нагревательный элемент. Нагреватель не сразу после включения выходит на режим постоянной мощности. В течение некоторого промежутка после включения в сеть его мощность линейно возрастает, достигает максимального значения и далее остаётся постоянной. График зависимости тепловой мощности нагревателя от времени приведён на рисунке.



Тепловыми потерями в окружающую среду можно пренебречь.

1. Какое количество теплоты получит вода от нагревательного элемента за первую минуту его работы?
2. Спустя какое время с момента включения вода нагреется на 5 °C?
3. Спустя какое время с момента включения нагревателя вода в калориметре закипит?
4. Какая масса пара будет образовываться в единицу времени после того, как вода закипит? Удельная теплота парообразования $L = 2{,}3 \cdot 10^6\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$.

Возможное решение

1. В течение малого промежутка времени тепловую мощность нагревательного элемента можно считать постоянной, тогда за время $\Delta\tau_i$ выделяется количество теплоты
$$\Delta Q_i = P_i \cdot \Delta\tau_i$$
Полное количество теплоты, выделяемое за конечный промежуток времени, будет определяться суммой всех малый порций
$$Q = \sum_i \Delta Q_i = \sum_i P_i \cdot \Delta\tau_i$$
-пропорционально площади под графиком.
$$Q_{\text{выд}}(\tau = 1\ \text{мин}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 60 = 60\ \text{кДж}$$
2. Для нагревания на 5 °C вода должна получить кол-во теплоты
$$Q_1 = cm\Delta t = 4200 \cdot 2 \cdot 5 = 42\ \text{кДж}$$
Поскольку это меньше, чем $Q_{\text{выд}}(\tau = 1\ \text{мин})$, то вода нагреется на 5 °C пока ещё тепловая мощность нагревательного элемента растёт. Тогда согласно уравнению теплового баланса следует, что
$$Q_{\text{пол}} = Q_{\text{отд}}$$
$$cm\Delta t = \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \alpha\tau,$$
Где $\alpha = 2\,\frac{\text{кВт}}{\text{мин}}$ – скорость роста тепловой мощности.
Тогда для времени нагрева получаем

$$\tau = \sqrt{\frac{2cm\,\Delta t}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2\cdot 4200\cdot 2\cdot\ 5\cdot 60}{2\cdot 10^3}} \approx 50{,}2\ \text{с}$$

3. Для того, чтобы вода закипела, она должная поглотить кол-во теплоты

$$Q_2 = cm(t_{\text{кип}} - t_0) = 4200\cdot 2\cdot (100-20) = 672\ \text{кДж}$$

Это больше, чем кол-во теплоты, выделяющееся на нагревательном элементе за 1 мин, значит уравнение теплового баланса для такого случая примет вид

$$cm(t_{\text{кип}} - t_0) = \frac{1}{2}\cdot P_{max}\cdot \tau_1 + P_{max}\tau_2$$

Где $\tau_1 = 1$ мин, $\tau_2 -$ время которое ещё понадобится по прошествии 1 мин, $P_{\max} = 2$ кВт

Для времени τ_2 получаем

$$\tau_2 = \frac{cm(t_{\text{кип}} - t_0) - 0{,}5P\tau_1}{P_{max}} = \frac{4200\cdot 2(100-20) - 0{,}5\cdot 2\cdot 10^3\cdot 60}{2\cdot 10^3} = 306\ c = 5{,}1\ \text{мин}$$

Тогда полное время с момента включения составляет

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = 6{,}1\ \text{мин}$$

4. После того, как вода закипит, всё подводимое тепло от нагревательного элемента идёт на выпаривание воды. К моменту начала кипения нагревательный элемент уже вышел на постоянную мощность, тогда за промежуток времени $\Delta\tau$ испарится масса воды Δm в соответствии с уравнением теплового баланса

$$L\Delta m = P_{max}\cdot \Delta\tau$$

Откуда

$$\frac{\Delta m}{\Delta\tau} = \frac{P_{max}}{L} = \frac{2\cdot 10^3}{2{,}3\cdot 10^6} \approx 8{,}7\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{кг}}{\text{с}} = 0{,}87\ \text{г/с}$$

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	Подсчитано количество теплоты, выделяемое на нагревательном элементе как площадь под графиком за 1 мин	2
2	Подсчитано кол-во теплоты, необходимое для нагрева воды на 5 °C.Сделан вывод о том, что тепловая мощность нагревательного элемента не вышла на максимальное значение	1
3	Правильно рассчитано время, необходимое для нагрева воды на 5 °C	2
4	Написано уравнение теплового баланса для случая когда вода достигает температуры кипения и правильно рассчитано полное время	2
5	Написано уравнение теплового баланса для процесса кипения	2
6	Найдена скорость испарения воды	1

Примечание для жюри

Полностью правильное решение, полученное неавторским методом, оценивается полным баллом. Недопустимо снижать оценку за «неправильное» оформление или неаккуратные записи.