

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
Ответы**

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное. Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части, – решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Авторы задач и составители – Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский.
Задачи 7.1, 7.2 и 8.1 предложены А.В. Резниковым, задача 8.2 предложена О.И. Южаковым, задача 9.4 предложена А.Д. Терёшиным, 11.2 предложена И.А. Кухарчуком.

6 класс

6.1. Про натуральное число, написанное на доске, Петя сказал, что оно больше 10, Коля сказал, что оно не меньше 11, Вася сказал, что оно больше 12, Дима сказал, что оно меньше 12, а Олег сказал, что оно не больше 12. Какое наибольшее число высказываний могли оказаться правильными?

Ответ. 4.

Решение. Все пять высказываний не могли оказаться верными, так как высказывания Васи и Димы противоречат друг другу. Четыре высказывания могли оказаться верными, если на доске записано число 11.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что все 5 высказываний не могут быть верными – 4 балла.

Доказано, что 4 высказывания могут быть верными – 3 балла.

6.2. У Пети есть семь карточек с цифрами 2, 3, 4, 5, 7, 8, 0. Он хочет, используя все карточки, составить наибольшее натуральное число, кратное 25. Какое число должно у него получиться?

Ответ. 8743250.

Решение. Так как число делится на 25, то оно должно заканчиваться на 25, 50 или 75. В любом случае среди последних двух цифр будет цифра 5. Число тем больше, чем большая цифра стоит в более левом разряде. Поэтому нужно, чтобы вместе с цифрой 5 осталась самая маленькая возможная цифра. А это цифра 0. Из оставшихся карточек составляется начало числа. Слева направо ставятся карточки в порядке убывания. В итоге получаем ответ: 8743250.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 4 балла.

6.3. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 25×25 на клетчатые прямоугольники такие, что у каждого из них длина и ширина отличаются на 1?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что такое разрезание возможно. Так как длина и ширина прямоугольника отличаются на 1, то одна из этих величин – четное число. Поэтому площадь каждого прямоугольника разрезания будет четным числом. Значит, и сумма площадей прямоугольников разрезания также будет четным числом. Но эта сумма должна равняться площади квадрата со стороной 25, то есть числу нечетному. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

6.4. Четыре пирата разделили добычу в 100 монет. Известно, что среди них ровно два лжеца (которые всегда лгут) и ровно два рыцаря (которые всегда говорят правду).

Они сказали:

Первый пират: «Мы разделили монеты поровну».

Второй пират: «У всех разное количество монет, но каждому досталось хотя бы 20 монет».

Третий пират: «У каждого количество монет делится на 5».

Четвертый пират: «У всех разное количество монет, но каждому досталось не более 35 монет».

Какое максимальное количество монет могло достаться одному пирату?

Ответ. 35 монет.

Решение. Заметим, что первый и четвертый пираты не могли одновременно сказать правду. Также не могли одновременно сказать правду второй и третий пираты. Действительно, если они оба сказали правду, то у каждого количество монет делится на 5, при этом у всех разное количество, не меньшее 20. Тогда у них вместе не меньше $20+25+30+35=110$ монет, чего быть не может. Поэтому среди первого и четвертого пиратов ровно один рыцарь и ровно один лжец (и среди второго и третьего пиратов ровно один рыцарь и ровно один лжец).

Если первый пират – рыцарь, то всем досталось по 25 монет (такая ситуация возможна). И в этом случае максимальное количество равно 25.

Если же четвертый пират рыцарь, то каждому досталось не больше 35 монет. Покажем, что в этом случае одному из пиратов могло достаться ровно 35 монет (и тогда ответ в задаче будет 35). Такая ситуация также возможна, если, например, пиратам досталось 35, 30, 20 и 15 монет (второй пират солгал, а третий сказал правду).

Замечание. Есть и другие способы распределить монеты так, чтобы одному из пиратов досталось 35 монет. Например, пиратам досталось 35, 24, 21 и 20 монет (третий пират солгал, а второй сказал правду).

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Установлены пары ответов, которые не могут одновременно быть правильными – 2 балла.

Доказано, что одному пирату не может достаться более 35 монет – 3 балла.

Приведен пример распределения монет – 2 балла.

6.5. По кругу выписано 100 чисел. Известно, что среди любых 3 подряд идущих есть положительное число. Какое наименьшее количество положительных чисел может быть среди этих 100 выписанных чисел?

Ответ. 34.

Решение. Рассмотрим любые 3 подряд идущих числа. Среди них есть положительное. Зафиксируем его, а остальные 99 разобьем на 33 тройки подряд идущих. В каждой такой тройке будет не менее одного положительного числа. Таким образом, общее количество положительных чисел не менее $1+33=34$. Такая ситуация возможна. Занумеруем числа по кругу. Положительными можно взять числа с номерами 1, 4, 7, ..., 100.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что положительных чисел не меньше 34 – 5 баллов.

Приведен пример с 34 положительными числами – 2 балла.

7 класс

7.1. Десять экскурсоводов водили по залам Эрмитажа десять экскурсионных групп. Составы групп были не обязательно равными, но в среднем в каждой группе было 9 человек. Когда одна из групп закончила экскурсию, среднее количество экскурсантов в группе уменьшилось до 8 человек. Сколько человек было в завершившей экскурсию группе?

Ответ. 18.

Решение. Суммарное количество экскурсантов изначально было равно $9 \cdot 10 = 90$. После того, как одна из групп закончила экскурсию, осталось $8 \cdot 9 = 72$ экскурсанта. Значит, в завершившей экскурсию группе было $90 - 72 = 18$ экскурсантов.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7.2. В школьном спортзале один стол для армрестлинга. Учитель физкультуры организовал школьный турнир. Он вызывает на схватку любых двух участников турнира, еще не встречавшихся друг с другом. Ничьих не бывает. Если участник схватки терпит второе поражение, то он выбывает из турнира. После того, как было проведено 29 схваток, из турнира выбыли все участники, кроме двух. Сколько школьников участвовало в турнире?

Ответ. 16.

Решение. Каждый участник выбывает, потерпев ровно два поражения. В ситуации, когда остались двое «финалистов», общее количество поражений равно 29. Если из турнира выбыло n человек, то они суммарно они потерпели $2n$ поражений, а на счету «финалистов» могло быть 0 (0+0), 1 (0+1) или 2 (1+1) поражения. Учитывая, что $2n$ и $2n+2$ – четные числа, приходим к уравнению $2n+1=29$, откуда $n=14$, а общее количество участников равно 16.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7.3. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 35×35 на клетчатые прямоугольники такие, что у каждого из них длина и ширина отличаются на 3?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что такое разрезание возможно. Так как длина и ширина прямоугольника отличаются на 3, то одна из этих величин – четное число. Поэтому площадь каждого прямоугольника разрезания будет четным числом. Значит, и сумма площадей прямоугольников разрезания также будет четным числом. Но эта сумма должна равняться площади квадрата со стороной 35, то есть числу нечетному. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7.4. Четыре пирата разделили добычу в 100 монет. Известно, что среди них ровно два лжеца (которые всегда лгут) и ровно два рыцаря (которые всегда говорят правду).

Они сказали:

Первый пират: «Мы разделили монеты поровну».

Второй пират: «У всех разное количество монет, но каждому досталось хотя бы 15 монет».

Третий пират: «У каждого количество монет делится на 5».

Четвертый пират: «У всех разное количество монет, но каждому досталось не более 35 монет».

Какое максимальное количество монет могло достаться одному пирату?

Ответ. 40 монет

Решение. Заметим, что первый и четвертый пираты не могли одновременно сказать правду.

Если первый пират – рыцарь, то всем досталось по 25 монет (такая ситуация возможна). В этом случае максимальное количество равно 25.

Если же четвертый пират рыцарь, то каждому досталось не больше 35 монет. И в этом случае максимальное количество монет не больше 35.

Если же оба первый и четвертый пираты лжецы, то второй и третий пираты сказали правду. Тогда любым трем пиратам досталось не менее $15+20+25=60$ монет, а, значит четвертому не более 40. Такая ситуация возможна, если пиратам досталось 15, 20, 35 и 40 монет. В этом случае максимальное количество равно 40 (и тогда ответ в задаче будет 40).

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Установлены пары ответов, которые не могут одновременно быть правильными – 2 балла.

Доказано, что одному пирату не может достаться более 40 монет – 3 балла.

Приведен пример распределения монет – 2 балла.

7.5. По кругу выписаны 100 целых ненулевых чисел таких, что каждое число больше произведения двух следующих за ним по часовой стрелке чисел. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди этих 100 выписанных чисел?

Ответ. 50.

Решение. Заметим, что два подряд идущих числа не могут быть положительными (то есть натуральными). Предположим противное. Тогда их произведение положительно, и перед ними (против часовой стрелки) также стоит натуральное число. Так как оно больше произведения этих двух натуральных чисел, то оно больше каждого из них. Продолжая рассуждения, мы получим, что все числа будут натуральными, причем, если идти против часовой стрелки, числа будут возрастать. Но когда «круг замкнется», мы придем к противоречию.

Значит, в любой паре соседних чисел есть хотя бы одно отрицательное. Разбив наши 100 чисел на 50 пар, мы получим, что записано не меньше 50 отрицательных чисел, а, значит, положительных чисел не больше 50. Если же мы будем чередовать положительное число 2 и отрицательное число -2 , мы получим пример расположения 50 положительных и 50 отрицательных чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказана невозможность расположения рядом двух положительных чисел – 3 балла.

Доказано, что положительных чисел не больше 50 – еще 1 балл.

Приведен пример с 50 положительными числами – 3 балла.

8 класс

8.1. Учащиеся школы отправились на экскурсию на шести автобусах. В автобусах было не обязательно равное количество школьников, но в среднем в каждом автобусе было 28 школьников. Когда первый автобус доехал до пункта назначения, в автобусах, продолжавших движение, среднее количество школьников стало равным 26. Сколько школьников ехало в первом автобусе?

Ответ. 38.

Решение. Суммарное количество школьников изначально было равно $28 \cdot 6 = 168$. После того, как первый автобус закончил поездку, осталось $26 \cdot 5 = 130$ школьников. Значит, в первом автобусе было $168 - 130 = 38$ школьников.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

8.2. В рабочие дни (с понедельника по пятницу) Петя пять раз занимался в тренажерном зале. Известно, что суммарно он провел в зале 135 минут, при этом время, проведенное в зале в любые два разных дня, отличалось, по крайней мере, на 7 минут. Какую наибольшую продолжительность могло составлять самое короткое занятие?

Ответ. 13 минут.

Решение. Обозначим минимальное время тренировки за x минут, тогда вторая (по продолжительности) не меньше, чем $x + 7$, третья не меньше, чем $x + 14$, четвертая не меньше, чем $x + 21$, пятая не меньше, чем $x + 28$. Тогда суммарно тренировки делятся не менее чем $5x + 70$ минут.

Решая неравенство $135 \geq 5x + 70$, получаем $x \leq 13$. Подходит продолжительность тренировок в 13, 20, 27, 34 и 41 минута.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что самое короткое занятие не может длиться более 13 минут – 5 баллов.

Приведен пример – 2 балла.

8.3. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 25×25 на клетчатые прямоугольники такие, что периметр каждого из них равен 18?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что такое разрезание возможно. Так как периметр прямоугольника равен 18, то сумма длины и ширины равна 9. Это означает, что одна из этих величин – четное число, а другая – нечетное. Поэтому площадь каждого прямоугольника разрезания будет четным числом. Значит, и сумма площадей прямоугольников разрезания также будет четным числом. Но эта сумма должна равняться площади квадрата со стороной 25, то есть числу нечетному. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

8.4. Дан треугольник ABC . Вне треугольника ABC выбраны точки D, E, F так, что $AD = DB$, $BE = EC$, $CF = FA$. Докажите, что прямые, содержащие биссектрисы углов ADB , BEC и CFA , пересекаются в одной точке.

Первое решение. Из условия следует, что треугольник ADB – равнобедренный, поэтому биссектриса DM угла ADB является, одновременно, медианой и высотой этого треугольника. Так же и биссектриса EN угла BEC является медианой и высотой треугольника BEC . Рассмотрим точку O пересечения прямых, содержащих биссектрисы углов ADB и BEC . В треугольнике AOB отрезок OM является одновременно медианой и высотой. Поэтому $AO = OB$. А из того, что точка O лежит на прямой EN , аналогично следует, что $OB = OC$. Мы получили равенство $OC = AO$, то есть равенство треугольников CFO и AFO по третьему признаку, из которого следует, что точка O лежит также и на биссектрисе угла CFA . Утверждение доказано.

Второе решение. Из условия следует, что треугольник ADB – равнобедренный, поэтому биссектриса угла ADB является, одновременно, его медианой и высотой. Тогда прямая, содержащая эту биссектрису, является серединным перпендикуляром к отрезку AB . Аналогично две другие прямые из условия задачи являются серединными перпендикулярами: одна к стороне BC , другая – к стороне CA треугольника ABC . А серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке – центре окружности, описанной около треугольника ABC .

8.5. По кругу выписано 101 число. Известно, что среди любых пяти подряд идущих чисел найдутся хотя бы два положительных числа. Какое наименьшее количество положительных чисел может быть среди этих 101 выписанного числа?

Ответ. 41.

Решение. Рассмотрим любые 5 подряд идущих чисел. Среди них есть положительное. Зафиксируем его, а остальные 100 разобьем на 20 пятерок подряд идущих. В каждой такой пятерке будет не менее двух положительных чисел. Таким образом, общее количество положительных чисел не менее $1 + 2 \cdot 20 = 41$. Такая ситуация возможна. Занумеруем числа по кругу. Положительными можно взять числа с номерами 1, 3, 6, 8, 11, ..., 98, 101.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что положительных чисел не меньше 41 – 5 баллов.

Приведен пример с 41 положительным числом – 2 балла.

9 класс

9.1. В поселке проживают семь человек. Некоторые из них лжецы (всегда лгут), а остальные – рыцари (всегда говорят правду). Каждый из них сказал про каждого из остальных кто он: рыцарь или лжец. Из 42 полученных ответов 24 были «Он – лжец». Какое наименьшее количество рыцарей может проживать в поселке?

Ответ. 3.

Решение. Фразу «Он – рыцарь» скажут рыцарь про рыцаря и лжец про лжеца, а фразу «Он – лжец» скажут рыцарь про лжеца и лжец про рыцаря. Следовательно, в каждой паре рыцарь-лжец фраза «Он – лжец» прозвучит дважды. Поскольку всего эта фраза прозвучала 24 раза, пар рыцарь-лжец всего 12, откуда находим, что рыцарей 3, а лжецов 4, или наоборот.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

9.2. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 35×35 на клетчатые прямоугольники такие, что периметр каждого из них равен 18, 22 или 26?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что такое разрезание возможно. Так как периметры прямоугольников равны 18, 22 или 26, то сумма длины и ширины равна 9, 11 или 13. Это означает, что одна из этих величин – четное число, а другая – нечетное. Поэтому площадь каждого прямоугольника разрезания будет четным числом. Значит, и сумма площадей прямоугольников разрезания также будет четным числом. Но эта сумма должна равняться площади квадрата со стороной 35, то есть числу нечетному. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

9.3. Положительное число a – коэффициент при x^2 квадратного трехчлена $f(x)$, не имеющего корней. Докажите, что при любом x выполняется неравенство $f(x) + f(x-1) - f(x+1) > -4a$.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда приведенное в задаче выражение имеет вид:
 $ax^2 + bx + c + a(x-1)^2 + b(x-1) + c - a(x+1)^2 - b(x+1) - c = ax^2 - 4ax + bx - 2b + c$. Это выражение можно преобразовать к виду $a(x-2)^2 + b(x-2) + c - 4a = f(x-2) - 4a > -4a$, так как из условия задачи следует, что $f(x) > 0$ при любом x .

Замечание. Можно показать, что дискриминант трехчлена $f(x) + f(x-1) - f(x+1) + 4a$ равен дискриминанту трехчлена $f(x)$.

9.4. Четырехугольник $ABCD$ ($AB > BC$) вписан в окружность Ω . Известно, что $AD = CD$. Докажите, что биссектриса угла ADB отсекает от угла BAC равнобедренный треугольник.

Решение. Пусть биссектриса угла ADB пересекает хорды AC и AB соответственно в точках M и N , и пересекает Ω в точке P . Для доказательства утверждения задачи покажем равенство углов AMN и ANM . Из равенства вписанных углов ADP и BDP (DP – биссектриса угла ADB) следует равенство дуг AP и BP . Также равны дуги AD и CD ,

стягиваемые равными хордами AD и CD . По свойству угла между пересекающимися хордами, угол AMN является полусуммой градусных мер дуг AP и CD , а угол ANM является полусуммой градусных мер дуг BP и AD . Следовательно, углы AMN и ANM равны.

9.5. По кругу выписаны 300 целых ненулевых чисел таких, что каждое число больше произведения трех следующих за ним по часовой стрелке чисел. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди этих 300 выписанных чисел?

Ответ. 200.

Решение. Заметим, что три подряд идущих числа не могут быть положительными (то есть натуральными). Предположим противное. Тогда их произведение положительно, и перед ними (против часовой стрелки) также стоит натуральное число. Так как оно больше произведения этих трех натуральных чисел, то оно больше каждого из них. Продолжая рассуждения, мы получим, что все числа будут натуральными, причем, если идти против часовой стрелки, числа будут возрастать. Но когда «круг замкнется», мы придем к противоречию.

Значит, в любой тройке соседних чисел есть хотя бы одно отрицательное. Разбив наши 300 чисел на 100 троек, мы получим, что записано не меньше 100 отрицательных чисел, а, значит, положительных чисел не больше 200. Если же мы будем чередовать два положительных числа 2 и одно отрицательное число -2 , мы получим пример расположения 200 положительных и 100 отрицательных чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказана невозможность расположения рядом трех положительных чисел – 3 балла.

Доказано, что положительных чисел не больше 200 – еще 1 балл.

Приведен пример с 200 положительными числами – 3 балла.

10 класс

10.1. Учитель математики договорился с пришедшими на факультатив одиннадцатью школьниками, что он выйдет из кабинета, а школьники договорятся между собой, кто из них будет лжецом (всегда лгать), а кто – рыцарем (всегда говорить правду). Когда учитель вернулся в класс, он попросил школьников, чтобы каждый из них сказал про каждого из остальных кто он: рыцарь или лжец. Из 110 ответов 56 были «Он – лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди школьников?

Ответ. 7.

Решение. Фразу «Он – рыцарь» скажут рыцарь про рыцаря и лжец про лжеца, а фразу «Он – лжец» скажут рыцарь про лжеца и лжец про рыцаря. Следовательно, в каждой паре «рыцарь-лжец» фраза «Он – лжец» прозвучит дважды. Поскольку всего эта фраза прозвучала 56 раз, пар рыцарь-лжец всего 28, откуда находим, что рыцарей 7, а лжецов 4, или наоборот.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

10.2. Можно ли разрезать куб $20 \times 20 \times 20$ на прямоугольные параллелепипеды такие, что у каждого из них длина, ширина и высота в некотором порядке являются последовательными натуральными числами?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что такое разрезание возможно. Так как длина, ширина и высота параллелепипеда являются тремя последовательными натуральными числами, то это означает, что одна из этих величин – число, делящееся на 3. Поэтому объем каждого параллелепипеда разрезания будет делиться на 3. Значит, и сумма объемов параллелепипедов разрезания также будет делиться на 3. Но эта сумма должна равняться объему куба с ребром 20, то есть числу не делящемуся на 3. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

10.3. Числа a, b, c – длины сторон треугольника. Докажите, что если в треугольнике угол, лежащий против стороны b , больше 60° , то уравнение $ax^2 + 2bx + c = 0$ имеет два различных корня.

Решение. Запишем теорему косинусов: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$. Из условия следует, что $\cos \beta < 0,5$, значит, $b^2 > a^2 + c^2 - ac$. Оценим четверть дискриминанта данного в условии трехчлена: $D/4 = b^2 - ac > a^2 + c^2 - 2ac = (a - c)^2 \geq 0$, то есть $D > 0$. Утверждение доказано.

10.4. На окружности с центром O и диаметрами AB и CD выбраны точки E и F так, что OD – биссектриса угла EOB и $AE = CF$ (точки E и F – по разные стороны от CD). Докажите, что хорда EF отсекает от угла EDC равнобедренный треугольник.

Решение. Пусть хорда EF пересекает радиус OD в точке K . Докажем равенство углов EDK и EKD . По свойству вписанных углов $\angle EDK = \angle EDC$ измеряется половиной градусной меры дуги EAC , то есть полусуммой градусных мер дуг EA и AC . Угол EKD является полусуммой градусных мер дуг ED и FC . Вторая дуга равна дуге EA , так как равны стягивающие их хорды AE и CF . Теперь утверждение задачи следует из того, что дуги AC

и DB , заключенные между диаметрами окружности, равны, и дуги ED и DB равны, поскольку радиус OD является биссектрисой угла EOB .

10.5. По кругу выписано 103 числа. Известно, что среди любых пяти подряд идущих чисел найдутся хотя бы два положительных числа. Какое наименьшее количество положительных чисел может быть среди этих 103 выписанных чисел?

Ответ. 42.

Решение. Покажем, что найдутся 3 подряд идущих числа, среди которых есть по крайней мере 2 положительных. Это можно сделать, например, так. Рассмотрим 15 подряд идущих чисел. Они разбиваются на 3 пятерки подряд идущих чисел, значит, среди них есть по крайней мере 6 положительных. Но эти 15 чисел можно разбить на 5 троек подряд идущих чисел. Значит, по принципу Дирихле, в какой-то тройке есть хотя бы 2 положительных числа.

Зафиксируем эти 3 подряд идущих числа. Среди них есть хотя бы 2 положительных. Остальные 100 разобьем на 20 пятерок подряд идущих. В каждой такой пятерке будет не менее двух положительных чисел. Таким образом, общее количество положительных чисел не менее $2+2\cdot 20=42$. Такая ситуация возможна. Занумеруем числа по кругу. Положительными можно взять числа с номерами 1, 2, 6, 7, ..., 96, 97, 101, 102.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что положительных чисел не меньше 42 – 5 баллов.

Приведен пример с 42 положительными числами – 2 балла.

11 класс

11.1. Можно ли разрезать куб $40 \times 40 \times 40$ на прямоугольные параллелепипеды такие, что у каждого из них длина, ширина и высота в некотором порядке являются последовательными нечетными числами?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что такое разрезание возможно. Так как длина, ширина и высота параллелепипеда являются тремя последовательными нечетными числами, то это означает, что одна из этих величин – число, делящееся на 3. Поэтому объем каждого параллелепипеда разрезания будет делиться на 3. Значит, и сумма объемов параллелепипедов разрезания также будет делиться на 3. Но эта сумма должна равняться объему куба с ребром 40, то есть числу не делящемуся на 3. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

11.2. Известно, что $\frac{1}{\cos(2022x)} + \operatorname{tg}(2022x) = \frac{1}{2022}$.

Найдите $\frac{1}{\cos(2022x)} - \operatorname{tg}(2022x)$.

Ответ. 2022.

Решение.

Рассмотрим произведение $\left(\frac{1}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha\right) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha\right) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1$.

Поэтому искомое выражение равно 2022.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

11.3. Рассматривается квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$, у которого различные положительные корни. Вася выписал на доску четыре числа: корни $P(x)$, а также корни трехчлена $Q(x) = cx^2 + bx + a$. Какое наименьшее целое значение может иметь сумма выписанных четырех чисел?

Ответ. 5.

Решение. Пусть у трехчлена $P(x)$ корни $x_1, x_2 > 0$. Тогда у трехчлена $Q(x)$ корнями будут числа $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$.

Сумма чисел, выписанных на доску, есть $S = x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$. Для положительного k

верно неравенство $k + \frac{1}{k} \geq 2$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда

$k = 1$. Поэтому $S \geq 4$. Но $S = 4$, только если $x_1 = x_2 = 1$. Но по условию x_1, x_2 различные. Поэтому $S > 4$. Значит, наименьшее возможное целое значение S равно 5. Такая ситуация

возможна. Пусть $x_1 = 1$, а x_2 – такое число, что $x_2 + \frac{1}{x_2} = 3$. Тогда трехчлен с корнями x_1, x_2 – искомым.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Замечено, что у трехчлена $Q(x)$ корнями являются числа $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ – 2 балла.

Доказано, что сумма четырех чисел не меньше 4 – 2 балла.

Доказано, что сумма четырех чисел больше 4 – еще 1 балл.

Доказано, что сумма четырех чисел может равняться 5 – 2 балла.

11.4. По кругу выписано 101 целое ненулевое число так, что каждое число больше произведения двух следующих за ним по часовой стрелке чисел. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди этих 101 выписанного числа?

Ответ. 67.

Решение. Рассмотрим любые 3 подряд идущих числа. Все они не могут быть отрицательными. Среди них есть положительное. Зафиксируем его и его соседа (это число может быть отрицательным), а остальные 99 разобьем на 33 тройки подряд идущих чисел. В каждой такой тройке будет не более двух отрицательных чисел. Таким образом, общее количество отрицательных чисел не более $1 + 2 \cdot 33 = 67$. Такая ситуация возможна. Занумеруем числа по кругу. Пусть положительными будут числа с номерами 1, 4, 7, 10, ..., 100, а остальные – отрицательными. Несложно проверить, что если все положительные числа равны 5, а отрицательные равны -2 , то каждое число больше произведения двух следующих за ним по часовой стрелке чисел.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что отрицательных чисел не больше 67 – 4 балла.

Приведен пример с 67 отрицательными числами – 3 балла.

11.5. Боковые грани пятиугольной пирамиды $SABCDE$ – остроугольные треугольники. Назовем боковое ребро пирамиды *хорошим*, если оно равно высоте противоположной боковой грани, проведенной из вершины пирамиды (например, ребро SA – хорошее, если оно равно высоте треугольника SCD , проведенной из вершины S). Какое наибольшее количество хороших ребер может иметь пирамида?

Ответ. 2.

Решение. Покажем, что два боковых ребра, не являющихся соседними ребрами пирамиды, не могут быть одновременно хорошими. Пусть это не так, и, например, ребра SA и SC являются хорошими, то есть $SA = SP$ – высоте грани SCD , и $SC = SQ$ – высоте грани SAE . Но, по свойству высоты остроугольного треугольника, $SP < SC$, и $SQ < SA$. Тогда $SA = SP < SC = SQ < SA$ – противоречие.

Теперь заметим, что среди трех боковых ребер пятиугольной пирамиды всегда найдутся два несоседних ребра. Значит, пирамида может иметь не более двух хороших ребер.

Покажем, что существует пятиугольная пирамида с двумя хорошими боковыми ребрами.

Рассмотрим квадрат $AMNE$ с центром O . Пусть в плоскости AMN прямая, проходящая через вершину M перпендикулярно EM , и прямая, проходящая через вершину N перпендикулярно AN , пересекаются в точке C . Точки B и D выберем так, что точки M и N – соответственно середины отрезков BC и DC . Выберем произвольно точку S на перпендикуляре к плоскости ABC , проходящем через точку O . Тогда, в силу теоремы о

трех перпендикулярах, SM и SN – высоты треугольников SBC и SDC . И, как следует из равнобедренности треугольников ESM и ASN , ребра SE и SA – хорошие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что пирамида не может иметь более 2 хороших ребер – 4 балла.

Приведен пример пирамиды с 2 хорошими ребрами – 3 балла.