

**ПОДМОСКОВНАЯ ОЛИМПИАДА УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ-2026.
ФИНАЛ. ЛИГА ЧЕМПИОНОВ.**

1. Даны положительные числа $a \leq b \leq c$, являющиеся сторонами некоторого треугольника. Пусть $f(x) = ax^2 + bx - c$.

А) Докажите, что ровно один корень уравнения $f(x) = 0$ принадлежит интервалу $(0; 2)$.

Б) Докажите, что уравнение $f(x) = 0$ не имеет корней на отрезке $[-1; 0]$.

В) Найдите наименьшее отрицательное $k = k(a; b; c)$ такое, что на отрезке $[k; 0]$ уравнение $f(x) = 0$ гарантированно не имеет действительных корней при любых $0 < a \leq b \leq c$.

РЕШЕНИЕ.

А) Уравнение $f(x) = 0$ имеет 2 корня, т.к. $D > 0$.

Произведение корней отрицательно, то есть, ровно один корень положителен.

$$f(1) = a + b - c > 0, \text{ т.к. } a + b > c \text{ из условия. } f(0) < 0.$$

$f(x)$ непрерывна на R .

Тогда $f(x)$ обращается в ноль в некоторой единственной точке интервала $(0; 1)$, вложенного в интервал $(0; 2)$.

Б) График $f(x)$ – парабола, ветви которой направлены вверх. График $f(x)$ выпуклый вниз на R .

Тогда для отсутствия корней уравнения $f(x) = 0$ на $[-1; 0]$ достаточно выполнения системы
$$\begin{cases} f(-1) < 0 \\ f(0) < 0 \end{cases}; \begin{cases} a - b - c < 0 \\ -c < 0 \end{cases}; \begin{cases} a < b + c \\ c > 0 \end{cases}.$$

Оба неравенства верны из условия.

В) Меньший корень квадратного уравнения $f(x) = 0$ равен $\frac{-b - \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$.

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} < \frac{-b - \sqrt{(c-a)^2 + 4ac}}{2a} = -\frac{a+b+c}{2a}.$$

$$f\left(-\frac{a+b+c}{2a}\right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac}{4a} - \frac{ab + b^2 + bc}{2a} - c = \frac{(a-c)^2 - b^2}{4a} = \frac{(a-c-b)(a+b-c)}{4a} < 0 \text{ всегда.}$$

Также можно сказать, что если значение $\frac{(a-c-b)(a+b-c)}{4a} < 0$ входит в множество значений $f(x)$, то и отрицательные значения $f(x)$, куда более

близкие к нулю, к примеру $\frac{(a-c-b)(a+b-c)}{100000000a} < 0$ тоже будут достигнуты при определенных x .

Тем самым, никакого наименьшего параметрически заданного минимального k для этой задачи не существует.

Ответ: таких k нет.

КРИТЕРИИ.

Если пункт задачи А или Б выполнен верно и обоснованно – ставится 1 балл за каждый из них.

Пункт В:

- Доказано, что таких k не существует – 4 балла.
- Есть недоказанное предположение, что таких k не существует – 2 балла.

2. Для какого наименьшего $n \in \mathbb{N}; n \geq 4$ во всяком натуральном n -значном числе без нулей в десятичной записи можно зачеркнуть некоторое количество цифр (от 1 до $n - 3$ включительно) так, чтобы оставшееся число делилось на 3 без остатка?

РЕШЕНИЕ.

Оценка снизу: в четырёхзначном числе 3344 нельзя вычеркнуть 1 цифру так, чтобы оставшееся число делилось без остатка на 3, то есть $n \geq 5$.

Рассмотрим $n = 5$. В пятизначном числе разрешается вычеркнуть 2 цифры. Трёхзначные числа, кратные 3 – это числа, все цифры которого дают одинаковый остаток при делении на 3 или числа, цифры которого при делении на 3 дают каждый из остатков: 0; 1; 2.

Допустим, найдется пятизначное число, в котором нельзя вычеркнуть 2 цифры так, чтобы оставшееся число делилось без остатка на 3.

То есть, исходное пятизначное число не может содержать хотя бы трех цифр с одинаковым остатком от деления на 3, а также не может содержать тройки цифр, дающих каждый из остатков: 0; 1; 2 от деления на 3.

Тем самым, среди троек цифр: {1; 4; 7}; {2; 5; 8}; {3; 6; 9} цифры одной тройки использовать нельзя, а из двух других троек разрешается брать не более 2-х цифр (возможно, одинаковых). Пятизначного числа не получается.

Противоречие.

Ответ: 5.

КРИТЕРИИ.

Верно выполнена оценка снизу – 1 балл.

Верно приведено рассуждение для $n = 5$ – ещё 3 балла.

3. Внутри правильного тетраэдра, высота которого равна 8 см, случайно выбрана точка. Найдите вероятность, что она удалена от ближайшей грани тетраэдра более чем на 1 см.

РЕШЕНИЕ.

Проведем 4 секущие плоскости, параллельные граням правильного тетраэдра, удаленные от его граней на расстояние 1 см.

Эти 4 плоскости ограничивают малый правильный тетраэдр, подобный исходному, все внутренние точки которого удовлетворяют требованию задачи.

Теорема Вивиани гласит: сумма расстояний от любой точки внутри правильного тетраэдра до его граней постоянна и равна высоте этого тетраэдра H .

Пусть h_1, h_2, h_3, h_4 — расстояния от случайно выбранной точки P до четырех граней тетраэдра.

Тогда $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 8$ см.

Согласно условиям задачи $h_i > 1$ см.

Пусть $h_i - 1 = x_i > 0$. Тогда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ см.

Это уравнение описывает внутреннее пространство нашего малого правильного тетраэдра, высота которого $H = 4$ см.

Вероятность того, что точка попадет в эту область, равна отношению объемов благоприятного (внутреннего) тетраэдра и всего исходного тетраэдра.

Так как тела подобны, отношение их объемов равно кубу отношения их высот.

$$\left(\frac{4}{8}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0,125.$$

КРИТЕРИИ.

Задача сведена к поиску отношения объёмов тетраэдров – 1 балл.

Верно найден каким-либо способом коэффициент подобия тетраэдров – еще 2 балла.

Верно найдена искомая вероятность – ещё 1 балл.

4. Решите неравенство $x(1 - 8x^2)\sqrt{1 - 4x^2} < \frac{1}{8}$.

РЕШЕНИЕ.

$$2x = \sin y; x \in [-0,5; 0,5]$$

$$\sin y \cdot \cos 2y \cdot |\cos y| < \frac{1}{4}$$

$$\left[\begin{cases} \cos y \geq 0 \\ \sin 4y < 1 \\ \cos y < 0 \\ \sin 4y > -1 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq \frac{\pi}{8} + 2\pi n \\ y \neq -\frac{3\pi}{8} + 2\pi n \\ y \neq -\frac{5\pi}{8} + 2\pi n \\ y \neq \frac{7\pi}{8} + 2\pi n \\ y \in R \\ n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-0,5; 0,5] \setminus \left\{ \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{2}; -\frac{\sin(\frac{3\pi}{8})}{2} \right\}.$$

КРИТЕРИИ.

Сделана тригонометрическая замена – 1 балл.

Верно найдено решение неравенства – ещё 3 балла.

5. А) Можно ли в клетках поля размером 2027 на 2027 клеток расставить числа от 1 до 2027^2 , чтобы существовал циклический маршрут

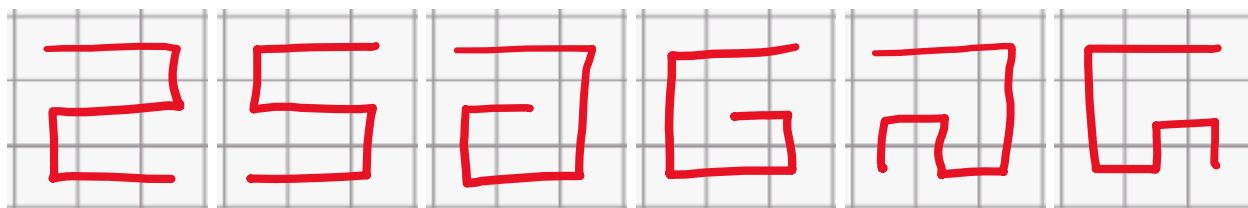
$1 - 2 - 3 - 4 - \dots - 2027^2 - 1$, если можно переходить только на соседнюю по стороне клетку?

Б) Сколькими способами в клетках поля размером 3 на 3 клетки можно расставить натуральные числа от 1 до 9 , чтобы существовал маршрут $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9$, если можно переходить только на соседнюю по стороне клетку?

РЕШЕНИЕ.

А) Нет, так как при шахматной раскраске ячейки с номерами 1 и 2027^2 будут одного цвета, то есть, нельзя будет за 1 ход с ячейки 2027^2 перейти в ячейку 1 .

Б) Нарисуем возможные пути.



Заметим, что и начало, и конец маршрута расположены или в угловых клетках, или в центральной (по принципу шахматной раскраски).

Из угловой клетки в противоположную угловую клетку можно добраться способами, как на рис. 1 и 2 (с учетом всех поворотов этих рисунков на 90 градусов).

Из угловой клетки в центральную клетку можно добраться способами, как на рис. 3 и 4 (с учетом всех поворотов этих рисунков на 90 градусов).

Из угловой клетки в ближайшую угловую клетку можно добраться способами, как на рис. 5 и 6 (с учетом всех поворотов этих рисунков на 90 градусов).

Из угловой клетки в противоположную угловую клетку можно добраться $(2 + 2) \cdot 2 = 8$ способами. Из угловой клетки в центральную клетку (или наоборот) можно добраться $(4 + 4) \cdot 2 = 16$ способами. Из угловой клетки в ближайшую угловую клетку можно добраться $(4 + 4) \cdot 2 = 16$ способами. Итого: 40 маршрутов.

КРИТЕРИИ.

Верно описан какой-либо инвариант, доказывающий отсутствие маршрута в пункте А – 2 балла.

Пункт Б: найдены 40 маршрутов при обосновании конечности перебора – ещё 3 балла. Если найдутся замечания к доказательству полноты перебора – при верном ответе – 2 балла. Получен неверный ответ – 0 баллов.

6.

А) Дан параллелограмм $ABCD$. В плоскости этого параллелограмма нашлась точка N такая, что $NA^2 + NC^2 = NB^2 + ND^2$. Найдите углы параллелограмма.

Б) Определите геометрическое место точек N для всего семейства параллелограммов из пункта А), лежащих в плоскости этого параллелограмма.

РЕШЕНИЕ.

А) У треугольников NAC и NBD есть общая медиана NO (в силу свойства диагоналей параллелограмма).

$$\Delta NAC: NO = \frac{\sqrt{2NA^2 + 2NC^2 - AC^2}}{2}$$

$$\Delta NBD: NO = \frac{\sqrt{2NB^2 + 2ND^2 - BD^2}}{2}$$

Тогда $2NA^2 + 2NC^2 - AC^2 = 2NB^2 + 2ND^2 - BD^2$, а в силу условия

$NA^2 + NC^2 = NB^2 + ND^2$, имеем $AC^2 = BD^2$, откуда $AC = BD$.

Так как диагонали параллелограмма равны, то это прямоугольник. Все его углы по 90° .

Б) Если задать координаты вершин прямоугольника как $A(0; 0)$; $B(0; a)$; $C(b; a)$; $D(b; 0)$, а координаты точки $N(x; y)$, то равенство $NA^2 + NC^2 = NB^2 + ND^2$

равносильно **тождественному** равенству

$$(x^2 + y^2) + ((x - b)^2 + (y - a)^2) = (x^2 + (y - a)^2) + ((x - b)^2 + y^2).$$

То есть, N – любая точка плоскости, в которой расположен прямоугольник $ABCD$.

КРИТЕРИИ.

Пункт А:

- Верное и обоснованное решение – 5 баллов.
- Наличие неточностей в доказательстве – снимать не более 1-го балла.
- Замечено, что NO – общая медиана треугольников NAC и NBD без дальнейших продвижений – 2 балла.
- Показано, что в прямоугольнике такая точка N где-либо найдется, но не доказано, что в других параллелограммах такой точки нет – 1 балл.
- Решение методом координат, приведшее к неверному ответу – 0 баллов.

Пункт Б:

- Выдвинуто предположение, что все точки плоскости удовлетворяют условию задачи – 1 балл.
- Это предположение доказано – еще 1 балл.

Методический блок.

7. Мы – учителя часто сталкиваемся с проблемой осмысленного чтения детьми математической литературы. Многие дети, которые видят математические/технические тексты впервые, не способны понять суть, особенно, если непонимание математической составляющей сопряжено с недостаточным кругозором. Попробуем теперь сами разобраться в тексте.

Прочитайте отрывок из статьи покойного физика проф. А. Эйхенвальда*.

* Она была напечатана в «Русском астрономическом календаре» на 1919 г.

Логарифмы в музыке.

Товарищ мой по гимназии любил играть на рояле, но не любил математики. Он даже говорил с оттенком пренебрежения, что музыка и математика друг с другом ничего не имеют общего. "Правда, Пифагор нашел какие-то соотношения между звуковыми колебаниями, - но ведь как раз пифагорова-то гамма для нашей музыки и оказалась неприменимой".

Представьте же себе, как неприятно был поражен мой товарищ, когда я доказал ему, что, играя по клавишам современного рояля, он играет, собственно говоря, на логарифмах... И действительно, так называемые "ступени" темперированной хроматической гаммы не расставлены на равных расстояниях ни по отношению к числам колебаний, ни по отношению к длинам волн соответствующих звуков, а представляют собой логарифмы этих величин. И основание этих логарифмов равно 2.

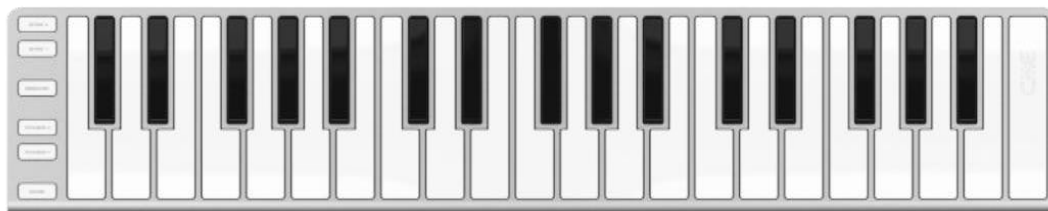
Положим, что нота *do* самой низкой октавы - будем ее называть нулевой октавой - определена n колебаниями в секунду. Тогда *do* первой октавы будет делать в секунду $2n$ колебаний, а 2-й октавы $4n$ колебаний в секунду и т. д.

Обозначим все ноты хроматической гаммы рояля номерами p , принимая основной тон *do* каждой октавы за нулевой; тогда, например, тон *sol* будет 7-й, *la* будет 9-й и т. д.

Отсюда видим, что номера клавишей рояля представляют собой логарифмы чисел колебаний соответствующих звуков по основанию 2. Мы даже можем сказать, что номер октавы m представляет собой характеристику, а номер звука p в данной октаве влияет на мантиссу этого логарифма.

А) Первая и восьмая белые клавиши слева направо на рисунке – это ноты *do*.

Какой номер хроматической гаммы рояля p будет соответствовать ноте *mi*?



Б) Число колебаний N в секунду любого тона можно выразить формулой, зависящей от n ; m ; p . По описанию в тексте задачи напишите эту формулу.

В) Корректно ли с точки зрения математики сформулированы предложения последнего абзаца текста? Если надо что-то «выправить» – напишите, что именно и как именно.

Г) Во сколько примерно раз частота (количество колебаний в секунду) тона mi третьей октавы больше частоты тона do первой октавы? Дайте ответ с точностью до десятых.

Д) Придумайте ещё пару вопросов на интерпретацию/понимание содержания этого текста. Дайте ответы на них.

РЕШЕНИЕ.

А) $p = 4$

Б) $N = n \cdot 2^{m + \frac{1}{12}p}$

В) Предложение «Отсюда видим, что номера клавишей рояля **представляют собой логарифмы чисел колебаний соответствующих звуков** по основанию 2» сформулировано неверно.

Корректировка: «Отсюда видим, что номера клавишей рояля **пропорциональны логарифмам отношения чисел колебаний соответствующих звуков к числу колебаний ноты do самой низкой октавы** по основанию 2».

Г) $N = n \cdot 2^{m + \frac{1}{12}p}$

$$N_{mi-3} = n \cdot 2^{3 + \frac{4}{12}} = 8n\sqrt[3]{2}$$

$$N_{do-1} = n \cdot 2^{1 + \frac{0}{12}} = 2n$$

$$\frac{N_{mi-3}}{N_{do-1}} = 4\sqrt[3]{2}$$

Нетрудно убедиться, что $1,25 < \sqrt[3]{2} < 1,26$, поэтому $4\sqrt[3]{2} \approx 5,0 = 5$

КРИТЕРИИ.

Если пункт задачи выполнен верно и обоснованно – ставится соответствующее число баллов.

А) – 1 балл, Б) – 2 балла, В) – 2 балла, Г) – 1 балл, Д) – 2 балла.

8. Некоторое время назад автор этой методической задачи столкнулся с проблемой. В отборочном туре одного математического конкурса, который проходил в феврале, для 7 класса была предложена задача:

«На стороне BC треугольника ABC отметили точку D так, что $AB + BD = AC$ и $\widehat{ABC} = 84^\circ$; $\widehat{ADB} = 69^\circ$. Найдите меру угла ACB .»

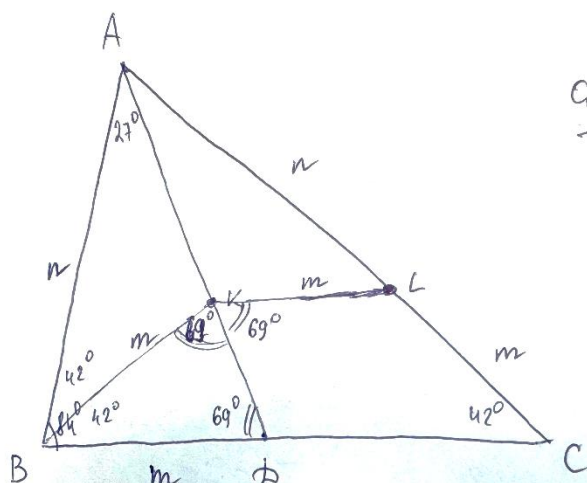
И, казалось бы, сюжеты подобных задач на «выпрямление ломаной» неоднократно рассматриваются на кружках, но ни один из толковых семиклассников самостоятельно с ней не справился.

Один из учеников обратился к **ИИ** (искусственный интеллект), который предъявил следующее решение.

1. $\widehat{BAD} = 27^\circ$. Пусть $AB = x$; $BD = y$; $AC = x + y$. Тогда по теореме синусов в треугольнике ABD имеем $y = \frac{x \cdot \sin 69^\circ}{\sin 27^\circ}$.

2. По теореме синусов в треугольнике ABC имеем $\frac{x+y}{\sin 84^\circ} = \frac{y}{\sin \widehat{ACB}}$, откуда $\sin \widehat{ACB} = \frac{\sin 69^\circ \cdot \sin 84^\circ}{\sin 69^\circ + \sin 27^\circ}$; $\sin \widehat{ACB} \approx 0,66913$; $\widehat{ACB} \approx \{0,73304; 2,40855\}$

Другой попросил друга из 9 класса помочь. Тот ему написал такое решение.



Спроектируем BK - биссектрису.
Тогда $\triangle BKD$ - равнобедрен.
 $L \in AC$; $AL = AB = n$; $LC = BK = m$
 $BKLC$ - равнод. трапеция
 $\angle ACB = 42^\circ = \angle KBD$
ОТВ: 42°

Ни тот, ни другой ученик, конечно, ничего особо не поняли. Давайте попробуем разобраться самостоятельно.

А) Один или два ответа в этой задаче? Почему?

Б) Разъясните, прав ли второй ученик, когда утверждает, что $BKLC$ – равнобокая трапеция? Если прав, то, очевидно, не доказал. Восстановите пробел доказательства за него. Если не прав – обоснуйте ошибку.

В) В решении 9-классника на рисунке есть пометка $KL = m$. Это правда? Почему?

Г) **ИИ**, по сути, привел нас к выводу $\sin \widehat{ACB} = \frac{\sin 69^\circ \cdot \sin 84^\circ}{\sin 69^\circ + \sin 27^\circ}$. Упрощается ли это без компьютерных вычислений? Найдётся ли без компьютерных вычислений по этой записи точная градусная мера $\widehat{ACB}$? Если да – как?

Д) С помощью конструкции, созданной приятелем из 9 класса, попробуйте найти **геометрическое доказательство** тождества $\frac{\sin 27^\circ}{\sin 69^\circ} = 2\cos 42^\circ - 1$, доступное ученику основной школы (по 9 класс) неуглубленного уровня.

Е) И всё же, все решения этой задачи, данные выше, никак не отнести к материалу курса геометрии седьмого класса. А есть ли решение, доступное семикласснику, все теоретические аспекты которого изложены в учебниках геометрии 7 класса, рекомендованных в Федеральном УМК?

Приведите его, если оно есть.

РЕШЕНИЕ.

А) Ответ единственный, так как треугольник ABD при некоторой заданной длине BD строится однозначно. В силу того, что угол ADC тупой и

$AD < AB + BD$, то и точка C на луче BD за точкой D из условия $CA = AB + BD$ выбирается тоже однозначно. $\widehat{ACB}$ также определяется однозначно.

Б) Прав, так как:

- $\frac{AK}{KD} = \frac{AB}{BD} = \frac{n}{m}$ (в силу свойства биссектрисы треугольника).
- Точка L на стороне AC выбрана так, что $\frac{AL}{LC} = \frac{n}{m}$. $BD = BK = LC = m$.
- $\frac{AK}{KD} = \frac{AL}{LC}$, откуда $KL \parallel BC$. $KL < DC < BC$. Тогда $BKLC$ – равнобедренная трапеция.

В) Правда. $\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ADB} = 111^\circ$. Тогда в треугольнике ADC легко заметить, что $\widehat{CAD} = 27^\circ$, после чего можно заявить о равенстве треугольников AKB & AKL по двум сторонам и углу между ними, откуда $KL = m = KB$.

$$\Gamma) \frac{\sin 69^\circ \cdot \sin 84^\circ}{\sin 69^\circ + \sin 27^\circ} = \frac{\sin 69^\circ \cdot \sin 84^\circ}{2 \sin 48^\circ \cos 21^\circ} = \frac{\sin 69^\circ \cdot \sin 84^\circ}{2 \sin 48^\circ \sin 69^\circ} = \frac{\sin 84^\circ}{2 \sin 48^\circ} = \frac{\sin 84^\circ}{2 \cos 42^\circ} = \frac{2 \cos 42^\circ \cdot \sin 42^\circ}{2 \cos 42^\circ} =$$

$$= \sin 42^\circ. \quad 0 < \widehat{ACB} < 69^\circ, \text{ тогда } \widehat{ACB} = 42^\circ.$$

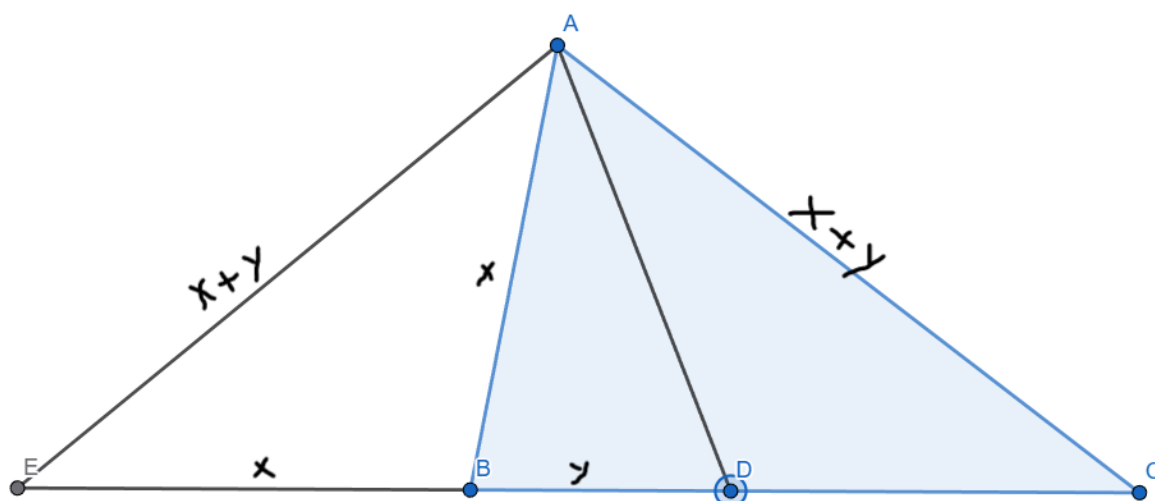
$$\Delta) \frac{\sin 27^\circ}{\sin 69^\circ} = \frac{m}{n} \text{ из теоремы синусов в треугольнике } ADB.$$

$$DC = \frac{m}{n}(m+n) \text{ из подобия треугольников } DAC \text{ \& } KAL.$$

Пусть LH – высота равнобедренной трапеции $BKLC$. Тогда в треугольнике LHC справедливо, что $\cos 42^\circ = \frac{HC}{LC} = \frac{1}{2}(\frac{m}{n} + 1)$, откуда $\frac{m}{n} = 2 \cos 42^\circ - 1$.

$$\frac{\sin 27^\circ}{\sin 69^\circ} = \frac{m}{n} = 2 \cos 42^\circ - 1, \text{ ч. т. д.}$$

Е)



На луче DB за точку B отложим отрезок $BE = BA = x$. Пусть $BD = y$.

В равнобедренном треугольнике EBA : $\widehat{EBA} = 96^\circ$; $\widehat{BEA} = \widehat{BAE} = 42^\circ$.

Тогда в треугольнике EDA : $\widehat{EAD} = 180^\circ - 69^\circ - 42^\circ = 69^\circ = \widehat{EDA}$; тем самым, $EA = ED = x + y$.

Таким образом, и треугольник ECA окажется равнобедренным с основанием EC , откуда $\widehat{CEA} = \widehat{ACE} = 42^\circ$.

КРИТЕРИИ.

Если пункт задачи выполнен верно и обоснованно – ставится соответствующее число баллов.

А-В) – 1 балл, Г-Д) – 2 балла, Е) – 5 баллов.