

**ПОДМОСКОВНАЯ ОЛИМПИАДА УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ-2026.
ФИНАЛ. ОСНОВНАЯ ЛИГА. РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ.**

1. Даны положительные числа a ; b ; c , являющиеся сторонами некоторого треугольника. Пусть $f(x) = ax^2 + bx - c$.

А) Докажите, что функция $f(x) = ax^2 + bx - c$ дважды обращается в ноль.

Б) Докажите, что уравнение $f(x) = 0$ не имеет корней на отрезке $[-1; 0]$.

В) Докажите, что ровно один корень уравнения $f(x) = 0$ принадлежит интервалу $(0; 2)$.

РЕШЕНИЕ.

А) $D = b^2 + 4ac > 0$, так как из условия оба слагаемых строго положительны.

Б) График $f(x)$ – парабола, ветви которой направлены вверх. График $f(x)$ выпуклый вниз на R . Тогда для отсутствия корней уравнения $f(x) = 0$ на $[-1; 0]$ достаточно выполнения системы

$$\begin{cases} f(-1) < 0 \\ f(0) < 0 \end{cases}; \begin{cases} a - b - c < 0 \\ -c < 0 \end{cases}; \begin{cases} a < b + c \\ c > 0 \end{cases}. \text{ Оба неравенства верны из условия.}$$

В) Уравнение $f(x) = 0$ имеет 2 корня. Произведение корней отрицательно, то есть, ровно один корень положителен. $f(1) = a + b - c > 0$, т.к. $a + b > c$ из условия. $f(0) < 0$. $f(x)$ непрерывна на R . Тогда $f(x)$ обращается в ноль в некоторой единственной точке интервала $(0; 1)$, вложенного в интервал $(0; 2)$.

КРИТЕРИИ.

Если пункт задачи выполнен верно и обоснованно – ставится соответствующее число баллов.

А) – 1 балл, Б) – 1 балл, В) – 2 балла.

2. Для какого наименьшего $n \in \mathbb{N}; n \geq 3$ во всяком натуральном n -значном числе без нулей в десятичной записи можно зачеркнуть некоторое количество цифр (от 1 до $n - 2$ включительно) так, чтобы оставшееся число делилось на 3 без остатка?

РЕШЕНИЕ.

Оценка снизу: в трёхзначном числе 344 нельзя вычеркнуть 1 цифру так, чтобы оставшееся число делилось без остатка на 3, то есть $n \geq 4$.

Рассмотрим $n = 4$. В четырёхзначном числе разрешается вычеркнуть 2 цифры. Двухзначные числа, кратные 3 – это числа, обе цифры которого кратны 3 или числа, одна цифра которого при делении на 3 даёт остаток 1, а другая – остаток 2.

Допустим, найдется четырёхзначное число, в котором нельзя вычеркнуть 2 цифры так, чтобы оставшееся число делилось без остатка на 3.

То есть, исходное четырёхзначное число не может содержать хотя бы двух цифр, кратных 3, а также не может содержать цифр, дающих разные ненулевые остатки от деления на 3.

Тогда как минимум три цифры четырёхзначного числа должны давать одинаковый ненулевой остаток от деления на 3. Но трёхзначное число, составленное из этих цифр, кратно 3. Противоречие.

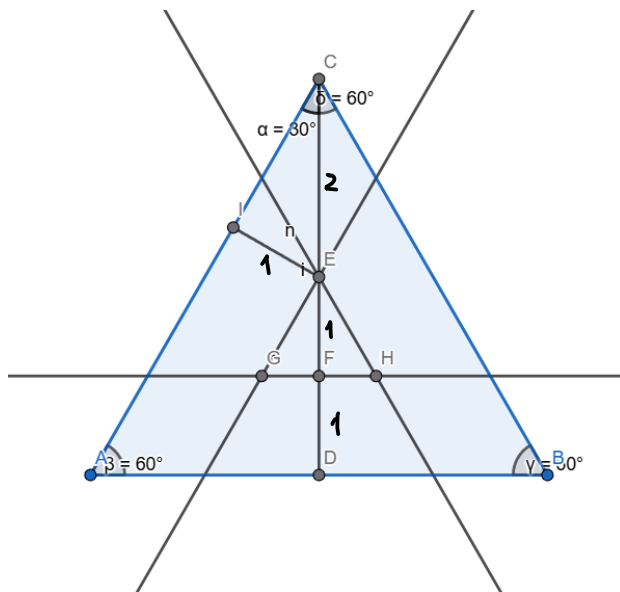
Ответ: 4.

КРИТЕРИИ.

Верно выполнена оценка снизу – 1 балл.

Верно приведено рассуждение для $n = 4$ – ещё 3 балла.

РЕШЕНИЕ.



$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

Верно найдена искомая вероятность – ещё 2 балла.

4. Решите уравнение $x(1 - 2x^2)\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{4}$.

РЕШЕНИЕ.

$$x = \sin y$$

$$\sin y \cdot \cos 2y \cdot |\cos y| = \frac{1}{4}$$

$$\left[\begin{cases} \cos y \geq 0 \\ \sin 4y = 1 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} y = \frac{\pi}{8} + 2\pi n \\ y = -\frac{3\pi}{8} + 2\pi n \\ y = -\frac{5\pi}{8} + 2\pi n \\ y = \frac{7\pi}{8} + 2\pi n \end{cases} \right]; n \in Z \Leftrightarrow x = \left\{ \sin \frac{\pi}{8}; -\sin \left(\frac{3\pi}{8} \right) \right\}$$

КРИТЕРИИ.

Сделана тригонометрическая замена – 1 балл.

Верно найдены все корни – ещё 3 балла.

5.

А) Можно ли в клетках поля размером 8 на 8 кл. расставить числа от 1 до 64, чтобы существовал циклический маршрут $1 - 2 - 3 - 4 - \dots - 63 - 64 - 1$, если можно переходить только на соседнюю по стороне клетку?

Б) Можно ли в клетках поля размером 9 на 9 кл. расставить числа от 1 до 81, чтобы существовал циклический маршрут $1 - 2 - 3 - 4 - \dots - 80 - 81 - 1$, если можно переходить только на соседнюю по стороне клетку?

В) Сколькими способами в клетках поля размером 3 на 3 клетки можно расставить натуральные числа от 1 до 9, чтобы существовал маршрут $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9$, если можно переходить только на соседнюю по стороне клетку?

РЕШЕНИЕ.

А) Да, это возможно, примеров уйма, достаточно привести хотя бы 1.

Б) Нет, так как при шахматной раскраске ячейки с номерами 1 и 81 будут одного цвета, то есть, нельзя будет за 1 ход с ячейки 81 перейти в ячейку 1.

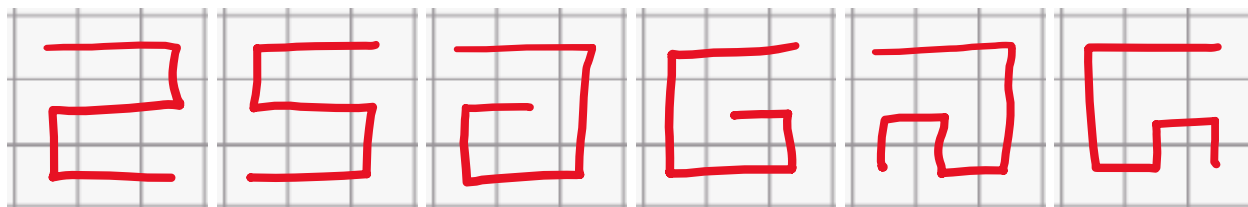
В) Нарисуем возможные пути.

Заметим, что и начало, и конец маршрута расположены или в угловых клетках, или в центральной (по принципу шахматной раскраски).

Из угловой клетки в противоположную угловую клетку можно добраться способами, как на рис. 1 и 2 (с учетом всех поворотов этих рисунков на 90 градусов).

Из угловой клетки в центральную клетку можно добраться способами, как на рис. 3 и 4 (с учетом всех поворотов этих рисунков на 90 градусов).

Из угловой клетки в ближайшую угловую клетку можно добраться способами, как на рис. 5 и 6 (с учетом всех поворотов этих рисунков на 90 градусов).



Из угловой клетки в противоположную угловую клетку можно добраться $(2 + 2) \cdot 2 = 8$ способами. Из угловой клетки в центральную клетку (или наоборот) можно добраться $(4 + 4) \cdot 2 = 16$ способами. Из угловой клетки в ближайшую угловую клетку можно добраться $(4 + 4) \cdot 2 = 16$ способами. Итого: 40 маршрутов.

КРИТЕРИИ.

Показан хотя бы 1 «рабочий» пример в пункте А – 1 балл.

Верно описан какой-либо инвариант, доказывающий отсутствие маршрута в пункте Б – еще 2 балла.

Пункт В: найдены 40 маршрутов при обосновании конечности перебора – ещё 4 балла. Если найдутся замечания к доказательству полноты перебора – при верном ответе – 2-3 балла. Получен неверный ответ – 0 баллов.

6. Дан параллелограмм $ABCD$. В плоскости этого параллелограмма нашлась точка N такая, что $NA^2 + NC^2 = NB^2 + ND^2$. Найдите углы параллелограмма.

РЕШЕНИЕ.

У треугольников NAC и NBD есть общая медиана NO (в силу свойства диагоналей параллелограмма).

$$\Delta NAC: NO = \frac{\sqrt{2NA^2 + 2NC^2 - AC^2}}{2}$$
$$\Delta NBD: NO = \frac{\sqrt{2NB^2 + 2ND^2 - BD^2}}{2}$$

Тогда $2NA^2 + 2NC^2 - AC^2 = 2NB^2 + 2ND^2 - BD^2$, а в силу условия $NA^2 + NC^2 = NB^2 + ND^2$, имеем $AC^2 = BD^2$, откуда $AC = BD$.

Так как диагонали параллелограмма равны, то это прямоугольник. Все его углы по 90° .

КРИТЕРИИ.

Верное и обоснованное решение – 7 баллов.

Наличие неточностей в доказательстве – снимать не более 2-х баллов.

Замечено, что NO – общая медиана треугольников NAC и NBD без дальнейших продвижений – 2 балла.

Показано, что в прямоугольнике такая точка N где-либо найдется, но не доказано, что в других параллелограммах такой точки нет – 1 балл.

Решение методом координат, приведшее к неверному ответу – 0 баллов.

Методический блок.

7. Прочитайте отрывок из статьи физика проф. А. Эйхенвальда*.

* Она была напечатана в «Русском астрономическом календаре» на 1919 г.

Логарифмы в музыке.

Товарищ мой по гимназии любил играть на рояле, но не любил математики. Он даже говорил с оттенком пренебрежения, что музыка и математика друг с другом ничего не имеют общего. "Правда, Пифагор нашел какие-то соотношения между звуковыми колебаниями, - но ведь как раз пифагорова-то гамма для нашей музыки и оказалась неприменимой".

Представьте же себе, как неприятно был поражен мой товарищ, когда я доказал ему, что, играя по клавишам современного рояля, он играет, собственно говоря, на логарифмах... И действительно, так называемые "ступени" темперированной хроматической гаммы не расставлены на равных расстояниях ни по отношению к числам колебаний, ни по отношению к длинам волн соответствующих звуков, а представляют собой логарифмы этих величин. И основание этих логарифмов равно 2.

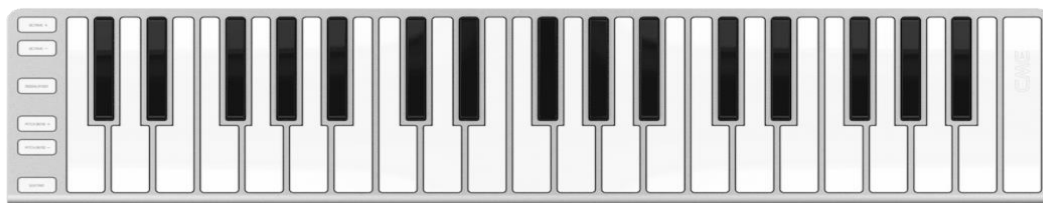
Положим, что нота *do* самой низкой октавы - будем ее называть нулевой октавой - определена n колебаниями в секунду. Тогда *do* первой октавы будет делать в секунду $2n$ колебаний, а 2-й октавы $4n$ колебаний в секунду и т. д.

Обозначим все ноты хроматической гаммы рояля номерами p , принимая основной тон *do* каждой октавы за нулевой; тогда, например, тон *sol* будет 7-й, *la* будет 9-й и т. д.

Отсюда видим, что номера клавишей рояля представляют собой логарифмы отношения чисел колебаний соответствующих звуков к числу колебаний ноты *do* самой низкой октавы по основанию 2. Мы даже можем сказать, что номер октавы t представляет собой характеристику, а номер звука p в данной октаве влияет на мантиссу этого логарифма.

А) Первая и восьмая белые клавиши слева направо на рисунке – это ноты *do*.

Какой номер хроматической гаммы рояля p будет соответствовать ноте *mi*?



Б) Число колебаний N в секунду любого тона можно выразить формулой, зависящей от n ; t ; p . По описанию в тексте задачи напишите эту формулу.

В) Преобразуйте формулу в пункте Б и скажите, что понимается под словом «характеристика» в предложении: «Мы даже можем сказать, что номер октавы m представляет собой характеристику, а номер звука p в данной октаве влияет на мантиссу этого логарифма.»

Г) Как конкретно p «влияет на мантиссу логарифма»?

Д) Интерпретируйте из текста, что же такое «хроматическая гамма рояля»?

Е) Во сколько примерно раз частота (количество колебаний в секунду) тона mi третьей октавы больше частоты тона do первой октавы? Дайте ответ с точностью до десятых.

РЕШЕНИЕ.

А) $p = 4$

Б) $N = n \cdot 2^{m + \frac{1}{12}p}$

В) $m + \frac{1}{12}p = \log_2 \frac{N}{n}$, где m – характеристика – целая часть логарифма $\log_2 \frac{N}{n}$.

Г) Мантисса логарифма – это $\frac{1}{12}$ часть целого числа p ; $0 \leq p \leq 11$.

Д) Хроматическая гамма рояля — это последовательность звуков, расположенных по возрастанию (или убыванию) высоты (частоты), где каждый звук отличается от предыдущего на полутон: $do; do\#; re; \dots$ Она включает все **12** нот в пределах одной октавы (как белые, так и чёрные клавиши).

Е) $N = n \cdot 2^{m + \frac{1}{12}p}$

$$N_{mi-3} = n \cdot 2^{3 + \frac{4}{12}} = 8n\sqrt[3]{2}$$

$$N_{do-1} = n \cdot 2^{1 + \frac{0}{12}} = 2n$$

$$\frac{N_{mi-3}}{N_{do-1}} = 4\sqrt[3]{2}$$

Нетрудно убедиться, что $1,25 < \sqrt[3]{2} < 1,26$, поэтому $4\sqrt[3]{2} \approx 5,0 = 5$

КРИТЕРИИ.

Если пункт задачи выполнен верно и обоснованно – ставится соответствующее число баллов.

А) – 1 балл, Б) – 2 балла, В) – 1 балл, Г) – 1 балл, Д) – 1 балл, Е) – 2 балла.

8. Некоторое время назад автор этой методической задачи столкнулся с проблемой. В отборочном туре одного математического конкурса, который проходил в феврале, для 7 класса была предложена задача:

«На стороне BC треугольника ABC отметили точку D так, что $AB + BD = AC$ и $\widehat{ABC} = 84^\circ$; $\widehat{ADB} = 69^\circ$. Найдите меру угла ACB .»

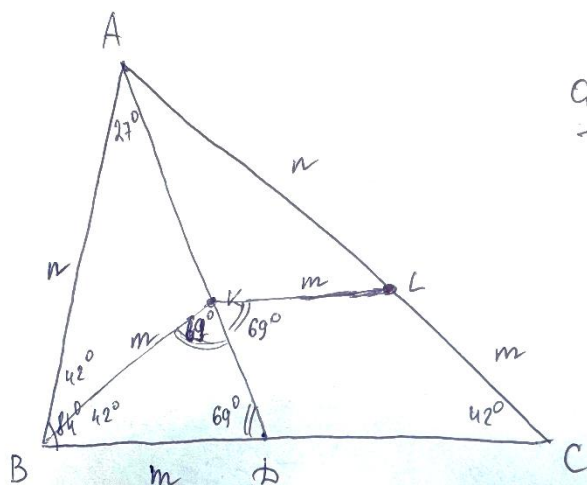
И, казалось бы, сюжеты подобных задач неоднократно рассматриваются на кружках, но ни один из толковых семиклассников самостоятельно с ней не справился.

Один из учеников обратился к ИИ (искусственный интеллект), который предъявил следующее решение.

1. $\widehat{BAD} = 27^\circ$. Пусть $AB = x$; $BD = y$; $AC = x + y$. Тогда по теореме синусов в треугольнике ABD имеем $y = \frac{x \cdot \sin 69^\circ}{\sin 27^\circ}$.

2. По теореме синусов в треугольнике ABC имеем $\frac{x+y}{\sin 84^\circ} = \frac{y}{\sin \widehat{ACB}}$, откуда $\sin \widehat{ACB} = \frac{\sin 69^\circ \cdot \sin 84^\circ}{\sin 69^\circ + \sin 27^\circ}$; $\sin \widehat{ACB} \approx 0,66913$; $\widehat{ACB} \approx \{0,73304; 2,40855\}$

Другой попросил приятеля из 9 класса помочь. Тот ему написал такое решение.



Спроектируем BK - биссектрису.
Тогда $\triangle BKD$ - равнобедр.
 $L \in AC$; $AL = AB = n$; $LC = BK = m$
 $BKLC$ - равноб. трапеция
 $\angle ACB = 42^\circ = \angle KBD$

Отв: 42°

Ни тот, ни другой ученик, конечно, ничего особо не поняли. Давайте попробуем разобраться самостоятельно.

А) Один или два ответа в этой задаче? Почему?

Б) Разъясните, прав ли второй ученик, когда утверждает, что $BKLC$ – равнобокая трапеция?

Если прав, то, очевидно, не доказал. Восстановите пробел доказательства за него.

Если не прав – обоснуйте ошибку.

В) В решении 9-классника на рисунке есть пометка $KL = m$. Это правда? Почему?

Г) **ИИ**, по сути, привел нас к выводу $\sin \widehat{ACB} = \frac{\sin 69^\circ \cdot \sin 84^\circ}{\sin 69^\circ + \sin 27^\circ}$. Упрощается ли это без компьютерных вычислений? Найдётся ли без компьютерных вычислений по этой записи точная градусная мера $\widehat{ACB}$?

Д) И всё же, все решения этой задачи, данные выше, никак не отнести к материалу курса геометрии седьмого класса. А есть ли решение, доступное семикласснику, все теоретические аспекты которого изложены в учебниках геометрии 7 класса, рекомендованных в Федеральном УМК?

Приведите его.

РЕШЕНИЕ.

А) Ответ единственный, так как треугольник ABD при некоторой заданной длине BD строится однозначно. В силу того, что угол ADC тупой и

$AD < AB + BD$, то и точка C на луче BD за точкой D из условия $CA = AB + BD$ выбирается тоже однозначно. $\widehat{ACB}$ также определяется однозначно.

Б) Прав, так как:

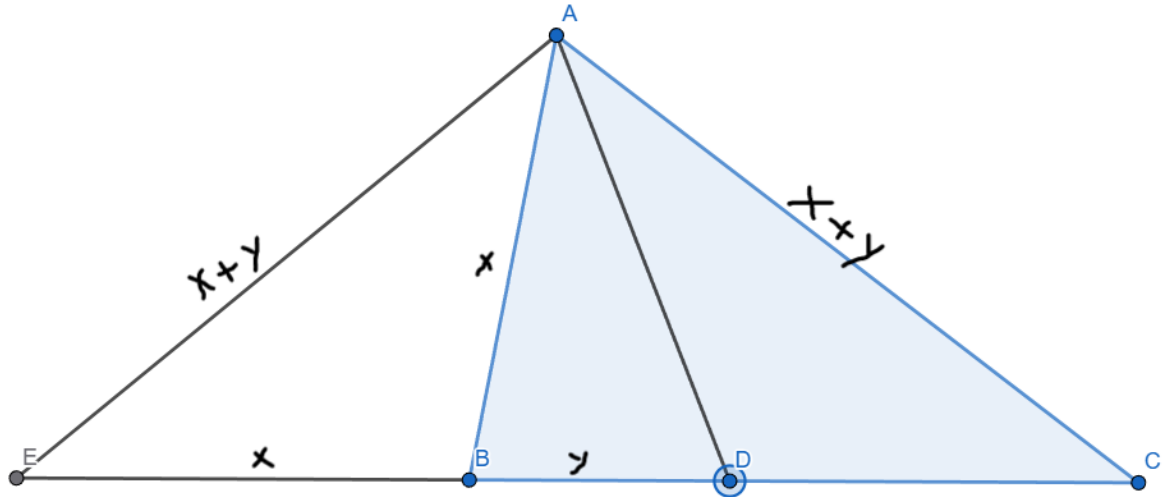
- $\frac{AK}{KD} = \frac{AB}{BD} = \frac{n}{m}$ (в силу свойства биссектрисы треугольника).
- Точка L на стороне AC выбрана так, что $\frac{AL}{LC} = \frac{n}{m}$. $BD = BK = LC = m$.
- $\frac{AK}{KD} = \frac{AL}{LC}$, откуда $KL \parallel BC$. $KL < DC < BC$. Тогда $BKLC$ – равнобедренная трапеция.

В) Правда. $\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ADB} = 111^\circ$. Тогда в треугольнике ADC легко заметить, что $\widehat{CAD} = 27^\circ$, после чего можно заявить о равенстве треугольников AKB & AKL по двум сторонам и углу между ними,

откуда $KL = m = KB$.

$$\begin{aligned} \Gamma) \frac{\sin 69^\circ \cdot \sin 84^\circ}{\sin 69^\circ + \sin 27^\circ} &= \frac{\sin 69^\circ \cdot \sin 84^\circ}{2 \sin 48^\circ \cos 21^\circ} = \frac{\sin 69^\circ \cdot \sin 84^\circ}{2 \sin 48^\circ \sin 69^\circ} = \frac{\sin 84^\circ}{2 \sin 48^\circ} = \frac{\sin 84^\circ}{2 \cos 42^\circ} = \frac{2 \cos 42^\circ \cdot \sin 42^\circ}{2 \cos 42^\circ} = \\ &= \sin 42^\circ. \quad 0 < \widehat{ACB} < 69^\circ, \text{ тогда } \widehat{ACB} = 42^\circ. \end{aligned}$$

Д)



На луче DB за точку B отложим отрезок $BE = BA = x$. Пусть $BD = y$.

В равнобедренном треугольнике EBA : $\widehat{EBA} = 96^\circ$; $\widehat{BEA} = \widehat{BAE} = 42^\circ$.

Тогда в треугольнике EDA : $\widehat{EAD} = 180^\circ - 69^\circ - 42^\circ = 69^\circ = \widehat{EDA}$; тем самым, $EA = ED = x + y$.

Таким образом, и треугольник ECA окажется равнобедренным с основанием EC , откуда $\widehat{CEA} = \widehat{ACE} = 42^\circ$.

КРИТЕРИИ.

Если пункт задачи выполнен верно и обоснованно – ставится соответствующее число баллов.

А) – 1 балл, Б) – 2 балла, В) – 1 балл, Г) – 2 балла, Д) – 6 баллов.